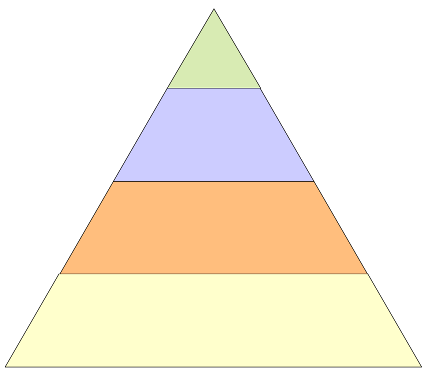
Les équations et inéquations logarithmiques

Enoncés

Résoudre dans R :

1) $\ln(3x-4)+\ln(x+1)=\ln(4x-2)$
2) $6\ \log^2 x-7\ \log\ x-20=0$
3) $\ln(-x+2)+\ln x=\ln\dfrac{3}{4}$
4) $8\ \log^2 x-2\ \log\ x-3=0$
5) $\ln\dfrac{x-1}{x+1}+\ln x=0$
6) $\ln\dfrac{x-2}{x+2}+\ln x=0$
7) $2\log_2 x+\log_x 2=3$
8) $3\log_3 x+\log_x 3=4$
9) $2.\ln 2+\ln(x^2-1)=\ln(4x-1)$
10) $2.\ln^3 x-9.\ln^2 x-2.\ln x+9=0$
11) $\ln\dfrac{2x-3}{x-2}\leq 0$
12) $\log_2\left(2^x-1\right)+x=\log_2 12$
13) $\ln\left(x^2+x-2\right)=1+\ln(x+2)$



Les équations logarithmiques
Corrigés

Résoudre dans R :

1. $\ln(3x-4) + \ln(x+1)= \ln(4x-2)$

Il existe deux méthodes pour résoudre ce type d'équations :

- *la méthode de vérifications* : résoudre directement l'équation sans tenir compte des conditions d'existence (on ne peut calculer le logarithme que d'un nombre strictement positif), vérifier ensuite si les réponses obtenues sont acceptables ou non.

$\ln[(3x-4)(x+1)]=\ln(4x-2)$ **$\ln a + \ln b = \ln(a.b)$**

$3x^2+3x-4x-4=4x-2$

$3x^2-5x-2=0$ **équation du deuxième degré**

$x_1=-1/3$, $x_2=2$

Vérifications : 1) $\ln(-1/3-4)$ STOP

2) $\ln(3*2-4) + \ln(2+1) = \ln(4*2-2)$

$\ln2 + \ln3 = \ln6$ OK **S={2}**

- *la méthode des conditions* : poser les conditions d'existence (on ne peut calculer le logarithme que d'un nombre strictement positif) et résoudre l'équation.

Conditions d'existence : 1) $3x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4/3$

2) $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ donc **$x > 4/3$**

3) $4x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > ½$

Résolution de l'équation : voir méthode précédente $x_1=-1/3$, $x_2=2$

$x_1=-1/3$ est à rejeter et on obtient **S={2}**

2. $6 \log^2x - 7 \log x -20 = 0$

- ce type d'équations est "à double étage" : trouver d'abord la valeur de logx
- et ensuite la valeur de x ($x > 0$)

Posons $t = \log x$, l'équation devient : $6t^2 - 7t - 20 = 0$ **équation du deuxième degré**

$t_1 = -4/3$, $t_2 = 2$

Donc $\log x = -4/3 \Leftrightarrow x = 10^{-4/3}$ ou $\log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$ **$\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$**

$S=\{10^{-4/3}, 100\}$

3. ln(-x+2) + lnx = ln(3/4)

a) <u>Méthode de vérifications</u> :

ln[(-x+2)x]=ln(3/4)

$-x^2+2x= 3/4 \Leftrightarrow -x^2+2x-3/4 = 0 \Leftrightarrow x_1=1/2,\ x_2=3/2$

<u>Vérifications</u> : 1) ln(-0,5+2)+ln0,5=ln0,75 ⇔ ln1,5+ln0,5=ln0,75 OK

2) ln(-1,5+2)+ln1,5=ln0,75 ⇔ ln0,5+ln1,5=ln0,75 OK **S={1/2, 3/2}**

b) <u>Méthode des conditions</u> :

1) -x +2 > 0 ⇔ -x > -2 ⇔ x < 2

2) x > 0 donc **0 < x < 2**

On a : $x_1=1/2$, $x_2=3/2$

Les deux solutions sont acceptables : **S={1/2, 3/2}**

4. 8 log²x - 2 logx - 3 = 0

Posons t = logx, l'équation devient : $8t^2 - 2t - 3 = 0$

$t_1 = 3/4$, $t_2 = -1/2$

Donc logx = -3/4 ⇔ $x = 10^{-3/4}$ ou logx = -1/2 ⇔ $x = 10^{-1/2}$

S={$10^{3/4}$, $10^{-1/2}$}

5. $\mathbf{\ln\frac{x-1}{x+1} + \ln x = 0}$

a) <u>Méthode de vérifications</u> :

$$\ln\frac{x-1}{x+1} + \ln x = 0 \Rightarrow \ln\left(x.\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln 1 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{x+1} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - x - x - 1}{x+1} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 1}{x+1} = 0$$

$$\Delta = 8 \qquad x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

<u>Vérifications</u> :

1) $\ln\frac{1+\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}+1} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2+\sqrt{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$

2) $\ln\frac{1-\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1}$: STOP

$$\mathbf{S} = \left\{1 + \sqrt{2}\right\}$$

b) Méthode des conditions :

1) $\frac{x-1}{x+1} > 0$

- tableau de signes :

x		-1		1	
x-1	-	-	-	0	+
x+1	-	0	+	+	+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	///	-	0	+

- $x < -1$ ou $x > 1$

2) $x > 0$

Donc **x > 1**

On a : $x_1 = 1 - \sqrt{2} \approx -0{,}41...$ ou $x_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}41...$

x_1 est à rejeter et $\mathbf{S = \{1 + \sqrt{2}\}}$

6. $\ln\frac{x-2}{x+2} + \ln x = 0$

a) Méthode de vérifications : $\ln\frac{x-2}{x+2} + \ln x = 0$

$$\Rightarrow \ln\left(x.\frac{x-2}{x+2}\right) = \ln 1 \Rightarrow \frac{x(x-2)}{x+2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - x - 2}{x+2} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x - 2}{x+1} = 0$$

$\Delta = 17 \qquad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

Vérifications :

$$1)\ \ln\frac{\frac{3+\sqrt{17}}{2} - 2}{\frac{3+\sqrt{17}}{2} + 2} + \ln\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{7+\sqrt{17}}.\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{-3-\sqrt{17}+3\sqrt{17}+17}{14+2\sqrt{17}}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln 1 = 0$$

2) $\ln \dfrac{\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}-2}{\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}+2}$: STOP

$\mathbf{S = \left\{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}}$

b) <u>Méthode des conditions</u> :

1) $\dfrac{x-2}{x+2} > 0$

- tableau de signes :

x		-2		2	
x-2	-	-	-	0	+
x+2	-	0	+	+	+
$\dfrac{x-2}{x+2}$	+	///	-	0	+

- $x < -2$ ou $x > 2$

2) $x > 0$

Donc $\mathbf{x > 2}$

On a : $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \approx$ -0,56... ou $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \approx$ 3,56...

x_1 est à rejeter et $\mathbf{S = \left\{\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}}$

7. 2 $\mathbf{\log_2 x + \log_x 2 = 3}$

<u>Nouveauté</u> : l'inconnue est la base d'un logarithme donc conditions d'existence

$\log_a x$ existe pour a>0 et a≠1

et pour x>0

<u>CE</u> : $x \in R_0^+ \setminus \{1\}$

Et $\mathbf{\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$

$$\Leftrightarrow 2\frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{\ln x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2.\ln^2 x - 3.\ln 2.\ln x + \ln^2 2}{\ln 2.\ln x} = 0 \Rightarrow 2.\ln^2 x - 3.\ln 2.\ln x + \ln^2 2 = 0$$

$\Delta = 9.\ln^2 2 - 4.2.\ln^2 2 = \ln^2 2$ $\qquad \ln x_1, \ln x_2 = \dfrac{3.\ln 2 \pm \ln 2}{4}$

$\ln x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $\ln x = \frac{1}{2}\ln 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln 2^{1/2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ p.lna = ln a^p^

$$\mathbf{S = \{\sqrt{2}, 2\}}$$

8. $3.\log_3 x + \log_x 3 = 4$

CE : $x \in R_0^+ \setminus \{1\}$

$$\Leftrightarrow 3\frac{\ln x}{\ln 3} + \frac{\ln 3}{\ln x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{3.\ln^2 x - 4.\ln 3.\ln x + \ln^2 3}{\ln 3.\ln x} = 0 \Rightarrow 3.\ln^2 x - 4.\ln 3.\ln x + \ln^2 3 = 0$$

$\Delta = 16.\ln^2 3 - 4.3.\ln^2 3 = 4.\ln^2 3$ $\quad \ln x_1, \ln x_2 = \frac{4.\ln 3 \pm 2.\ln 3}{6}$

$\ln x = \ln 3 \Leftrightarrow x = 3$ ou $\ln x = \frac{1}{3}\ln 3 \Leftrightarrow \ln x = \ln 3^{1/3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3}$ p.lna = ln a^p^

$$\mathbf{S = \{\sqrt[3]{3}, 3\}}$$

9. $2.\ln 2 + \ln(x^2 - 1) = \ln(4x - 1)$

a) <u>Méthode de vérifications</u> :

$\Rightarrow \ln(4x^2 - 4) = \ln(4x - 1) \Rightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$

$\Delta = 64 \quad x_1 = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{3}{2}$

<u>Vérifications</u> : 1) $x = -\frac{1}{2} : 2.\ln 2 + \ln\left(\frac{1}{4} - 1\right)$ STOP

2) $x = \frac{3}{2} : 2.\ln 2 + \ln\left(\frac{9}{4} - 1\right) = \ln(6 - 1) \Leftrightarrow \ln 4 + \ln\frac{5}{4} = \ln 5$ OK

$$\mathbf{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

b) <u>Méthode des conditions</u> :

1) $x^2 - 1 > 0$

- tableau de signes :

x		-1		1	
x-1	-	-	-	0	+
x+1	-	0	+	+	+
x^2-1	+	///	-	0	+

- $x < -1$ ou $x > 1$

2) $4x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{4}$

Donc **x > 1**

On a : $x_1 = -\frac{1}{2}$ ou $x_2 = \frac{3}{2}$

x_1 est à rejeter et $\mathbf{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

10. $\mathbf{2.\ln^3 x - 9.\ln^2 x - 2.\ln x + 9 = 0}$

Posons $t = \ln x$, l'équation devient : $2t^3 - 9t^2 - 2t + 9 = 0 \Leftrightarrow 2t(t^2 - 1) - 9(t^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+1)(2t-9) = 0$ donc $\ln x = 1$ ou $\ln x = -1$ ou $\ln x = \frac{9}{2}$

$\Leftrightarrow x = e$ ou $x = \frac{1}{e}$ ou $x = e^{9/2}$

$$\mathbf{S = \left\{e\,;\frac{1}{e}\,;e^{9/2}\right\}}$$

11. $\mathbf{\ln\frac{2x-3}{x-2} \le 0}$

➢ <u>CE</u> : $\frac{2x-3}{x-2} > 0$

- tableau de signes :

x		$\frac{3}{2}$		2	
2x-3	-	0	+	+	+
x-2	-	-	-	0	+
$\frac{2x-3}{x-2}$	+	0	-	///	+

- $\mathbf{x < \frac{3}{2}}$ **ou** $\mathbf{x > 2}$

➢ *Signe de lnx (x > 0) :*

✓ *Pour 0 < x < 1 : lnx < 0*

✓ *Pour x = 1 : ln1= 0*

✓ *Pour x > 1 : lnx > 0*

Donc $0 < \frac{2x-3}{x-2} \leq 1$

➢ Résolution de $\frac{2x-3}{x-2} \leq 1$

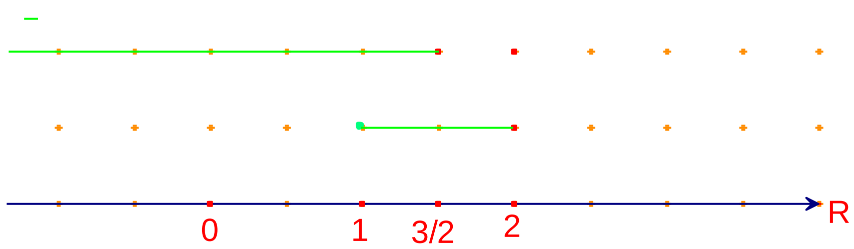
$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-2} - \frac{x-2}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3-x+2}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} \leq 0$$

- tableau de signes :

x		1		2	
x-1	-	0	+	+	+
x-2	-	-	-	0	+
$\frac{x-1}{x-2}$	+	0	-	///	+

- $\mathbf{S = [1,2[}$

➢ En conclusion :



$$\mathbf{S = \left[1, \frac{3}{2}\right[}$$

12. $\mathbf{\log_2(2^x - 1) + x = \log_2 12}$

$\mathbf{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$	$\mathbf{p.\ln a = \ln a^p}$	$\mathbf{\ln a + \ln b = \ln(a.b)}$	$\mathbf{\log_a a = 1}$

a) Méthode de vérifications :

$$\log_2\left(2^x-1\right)+x=\log_2 12 \Leftrightarrow \frac{\ln\left(2^x-1\right)}{\ln 2}+x=\frac{\ln 12}{\ln 2} \Leftrightarrow \ln\left(2^x-1\right)+x.\ln 2=\ln 12$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(2^x-1\right)+\ln 2^x=\ln 12 \Leftrightarrow \ln\left\{\left(2^x-1\right)2^x\right\}=\ln 12$$

$$\Rightarrow \left(2^x-1\right)2^x=12 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2^x-12=0$$

Posons $t=2^x>0$, l'èquation devient : $t^2-t-12=0$

$\Delta=49$ $\qquad$ $t_1=-3$ à rejeter; $t_2=4$

donc $\quad 2^x=4 \Leftrightarrow 2^x=2^2 \Leftrightarrow x=2$

Vérification :

$$\log_2\left(2^2-1\right)+2=\log_2 12 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2}+2=\frac{\ln 12}{\ln 2} \Leftrightarrow \ln 3+2\ln 2=\ln 12$$

$$\Leftrightarrow \ln 3+\ln 2^2=\ln 12 \Leftrightarrow \ln\left(3.2^2\right)=\ln 12$$

vrai $\qquad$ $\mathbf{S=\{2\}}$

b) Méthode de conditions :

$$2^x-1>0 \Leftrightarrow 2^x>1 \Leftrightarrow 2^x>2^0$$

la fonction exponentielle $f(x)=2^x$ étant une fonction strictement croissante, on peut en déduire la condition :

$$\mathbf{x>0}$$

et on peut accepter x=2 $\qquad$ $\mathbf{S=\{2\}}$

13. $\mathbf{\ln\left(x^2+x-2\right)=1+\ln\left(x+2\right)}$

$\mathbf{\ln e=1}$	$\mathbf{\ln a+\ln b=\ln\left(a.b\right)}$

a) Méthode de vérifications :

$$\ln\left(x^2+x-2\right)=1+\ln\left(x+2\right) \Leftrightarrow \ln\left(x^2+x-2\right)=\ln e+\ln\left(x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(x^2+x-2\right)=\ln\left(e\left(x+2\right)\right) \Rightarrow x^2+x-2=e.x+2e \Leftrightarrow x^2+\left(1-e\right)x-2-2e=0$$

$$\Delta=\left(1-e\right)^2-4.\left(-2-2e\right)=1-2e+e^2+8+8e=e^2+6e+9=\left(e+3\right)^2$$

$$x_1=\frac{-1+e+\left(e+3\right)}{2}=e+1 \qquad \text{ou} \qquad x_2=\frac{-1+e-\left(e+3\right)}{2}=-2$$

Vérifications : 1) $x = e+1 : \ln\left(e^2 + 2e + 1 + e + 1 - 2\right) = 1 + \ln(e + 1 + 2)$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^2 + 3e\right) = \ln e + \ln(e+3) \text{ : OK}$$

2) $x = -2 : \ln(4-2-2)\ldots$ STOP

$$\mathbf{S = \{e+1\}}$$

b) Méthode de conditions :

1) $x^2 + x - 2 > 0$

- Tableau de signes :

x		-2		1	
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0	+

- $x < -2$ ou $x > 1$

2) $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$

Donc $\mathbf{x > 1}$

On a : $x_1 = e+1$ ou $x_2 = -2$

x_2 est à rejeter et $\mathbf{S = \{e+1\}}$