Binôme de Newton

Enoncés

$(x \neq 0)$

1. Calculer le terme en x^3 dans $\left(4x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{15}$.

2. Calculer le terme en x^7 dans $\left(3x^4 - \frac{1}{3x}\right)^{8}$.

3. Déterminer le terme en x^{11} de $\left(3x^2 - \frac{5}{x^3}\right)^{8}$.

4. Développer : $\left(2x - \frac{y}{2}\right)^{5}$. Ordonner par rapport à x.

5. Déterminer le terme en x^6 du développement de $\left(4x^2 - \frac{1}{2x}\right)^{15}$.

6. Quel est le 7ème terme du développement de $(2x - y)^{10}$?

7. Quel est le terme en x^5 du développement de $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{10}$?

Binôme de Newton

Corrigés

($x \neq 0$)

$$\mathbf{(x+a)^m = \sum_{n=0}^{n=m} C_m^n a^n x^{m-n}}$$
$$\mathbf{= C_m^0 a^0 x^m + C_m^1 a^1 x^{m-1} + C_m^2 a^2 x^{m-2} + \ldots + C_m^{m-1} a^{m-1} x^1 + C_m^m a^m x^0}$$

1. Calculer le terme en x^3 dans $\left(4x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)^{15}$.

- $\left(4x^2 - \dfrac{1}{2x}\right)^{15}$: terme général $= (-1)^n C_{15}^n.(4x^2)^{15-n}.\left(\dfrac{1}{2x}\right)^n$;
- Puissance de x : $\dfrac{x^{30-2n}}{x^n} = x^{30-3n} \Rightarrow 30-3n = 3 \Leftrightarrow n = 9$;
- Terme en x^3 : $\mathbf{(-1)^9 C_{15}^9.(4x^2)^{15-9}.\left(\dfrac{1}{2x}\right)^9 = -5005.2^{12}.x^{12}.\dfrac{1}{2^9 x^9} = -40040.x^3}$.

2. Calculer le terme en x^7 dans $\left(3x^4 - \dfrac{1}{3x}\right)^8$.

- $\left(3x^4 - \dfrac{1}{3x}\right)^8$: terme général $= (-1)^n C_8^n.(3x^4)^{8-n}.\left(\dfrac{1}{3x}\right)^n$;
- Puissance de x : $\dfrac{x^{32-4n}}{x^n} = x^{32-5n} \Rightarrow 32-5n = 7 \Leftrightarrow n = 5$;
- Terme en x^7 : $\mathbf{(-1)^5 C_8^5.(3x^4)^{8-5}.\left(\dfrac{1}{3x}\right)^5 = -56.3^3.x^{12}.\dfrac{1}{3^5 x^5} = -\dfrac{56}{9}.x^7}$.

3. Déterminer le terme en x^{11} de $\left(3x^2 - \dfrac{5}{x^3}\right)^8$.

- $\left(3x^2 - \dfrac{5}{x^3}\right)^8$: terme général $= (-1)^n C_8^n.(3x^2)^{8-n}.\left(\dfrac{5}{x^3}\right)^n$;
- Puissance de x : $\dfrac{x^{16-2n}}{x^{3n}} = x^{16-5n} \Rightarrow 16-5n = 11 \Leftrightarrow n = 1$;
- Terme en x^{11} : $\mathbf{(-1)^1 C_8^1.(3x^2)^{8-1}.\left(\dfrac{5}{x^3}\right)^1 = -8.3^7.x^{14}.\dfrac{5}{x^3} = -87480.x^{11}}$.

4. $\left(2x-\frac{y}{2}\right)^5$

$=C_5^0\left(-\frac{y}{2}\right)^0(2x)^5+C_5^1\left(-\frac{y}{2}\right)^1(2x)^4+C_5^2\left(-\frac{y}{2}\right)^2(2x)^3+C_5^3\left(-\frac{y}{2}\right)^3(2x)^2+C_5^4\left(-\frac{y}{2}\right)^4(2x)^1+C_5^5\left(-\frac{y}{2}\right)^5(2x)^0$

$=2^5x^5-5\frac{y}{2}2^4x^4+10\frac{y^2}{2^2}2^3x^3-10\frac{y^3}{2^3}2^2x^2+5\frac{y^4}{2^4}2x-\frac{y^5}{2^5}$

$=32x^5-40x^4y+20x^3y^2-5x^2y^3+\frac{5}{8}xy^4-\frac{y^5}{32}$.

5. Déterminer le terme en x^6 du développement de $\left(4x^2-\frac{1}{2x}\right)^{15}$.

- terme général : $C_{15}^i\left(-\frac{1}{2x}\right)^i(4x^2)^{15-i}=(-1)^iC_{15}^i\frac{1}{2^i}\frac{1}{x^i}4^{15-i}x^{2(15-i)}$
- Puissance de x : $\frac{x^{30-2i}}{x^i}=x^6\Leftrightarrow x^{30-2i-i}=x^6\Leftrightarrow 30-3i=6\Leftrightarrow i=8$
- terme en x^6 : $\mathbf{C_{15}^8\left(-\frac{1}{2x}\right)^8(4x^2)^7=6435.\frac{4^7}{2^8}x^6=411840x^6}$

6. Quel est le $7^{\text{ème}}$ terme du développement de $(2x-y)^{10}$?

$7^{\text{ème}}$ terme donc n=6 : $\mathbf{C_{10}^6(-y)^6(2x)^4=210.y^6.16.x^4=3360x^4y^6}$

7. Quel est le terme en x^5 du développement de $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{10}$?

- terme général : $C_{10}^n\left(-\frac{1}{x^3}\right)^n.(x^4)^{10-n}$
- puissance de x : $\frac{1}{x^{3n}}.x^{40-4n}=x^{40-4n-3n}=x^{40-7n}$ donc $40-7n=5\Leftrightarrow n=5$
- terme en x^5 : $\mathbf{C_{10}^5\left(-\frac{1}{x^3}\right)^5.(x^4)^5=-252x^5}$