Le produit scalaire

1. Définition

Soit et deux vecteurs

Le produit scalaire de par est défini par

(1er formulation)



où  est l’angle formé par ces deux vecteurs

est la longueur du vecteur

est la longueur du vecteur

Remarques :

* Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel
* Si au moins l’un des vecteurs et est nul, nous ne pouvons pas définir l’angle entre les 2 vecteur ; dans ce cas

1. Signe du produit scalaire

Comme sont positifs (car ce sont des longueurs), le signe de est le même que

 aigu









 droit



obtus



Conclusion :

si 0° <  < 90° (angle aigu)

si  = 90° (angle droit)

si 90° <  < 180° (angle obtus)

1. Cas particuliers

* Soit et deux vecteurs parallèles dirigés dans le même sens
* Soit et deux vecteurs parallèles dirigés en sens opposés

180°

* ⬄

⬄ ou ou

1. **Autre formulation du produit scalaire (projection orthogonale)**

(*2ème formulation*)

où est la projection orthogonale du vecteur sur le vecteur .

En effet :

* Si

Si

* Si et ne sont ni parallèles, ni orthogonaux, on a 2 cas :



car





car

1. **Propriétés du produit scalaire**
2. Le produit scalaire est commutatif
3. Le produit scalaire vérifie l’associativité mixte
4. Le produit scalaire est distributif par rapport à l’addition des vecteurs

En effet :

1. **Produit scalaire en repère orthonormé**

0

x

y

Soit un repère orthonormé du plan

⬄

Soit

()

(3*ème formulation*)

Norme du vecteur

Donc

= Longueur du vecteur

Si

1. **Conclusion**

Lorsque l’on doit calculer le produit scalaire de deux vecteurs, la question est de se demander quelle formule il est préférable d’utiliser :

|  |  |
| --- | --- |
| Si et de même sens |  |
| Si et de sens contraire |  |
| Si , | on utilise la projection orthogonale  où est la projection orthogonale de |
| Si les vecteurs sont donnés par leurs composantes dans un repère orthonormé |  |
| Si les vecteurs sont donnés par leur norme et leur angle | avec  l’angle entre et |