

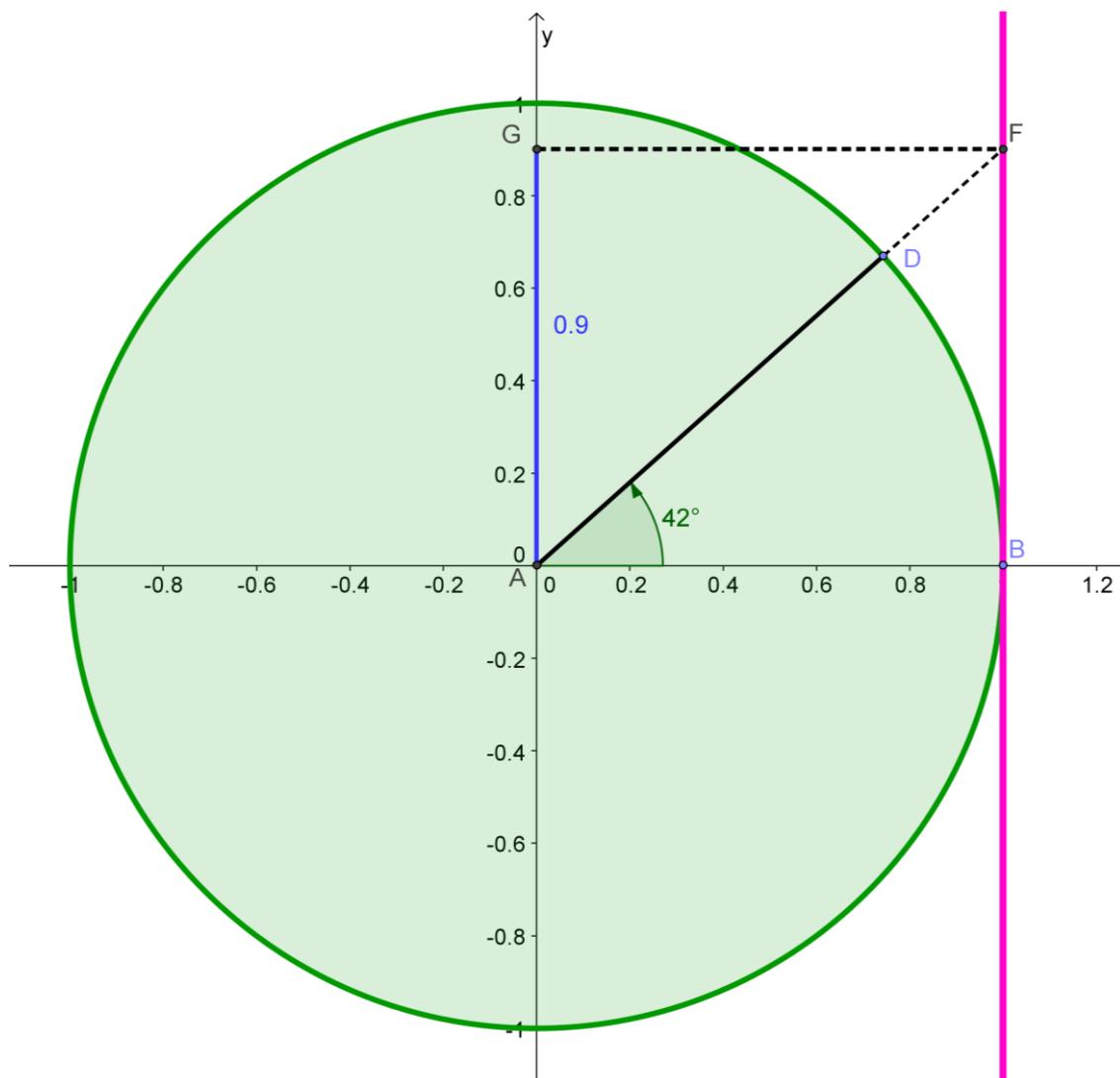


NOMBRES TRIGONOMÉTRIQUE : LA TANGENTE

Mise à jour : 31/01/13

La tangente d'un angle α est un nombre réel. Mais contrairement au sinus et au cosinus, ses valeurs ne sont pas limitées. Tu vas découvrir pourquoi !

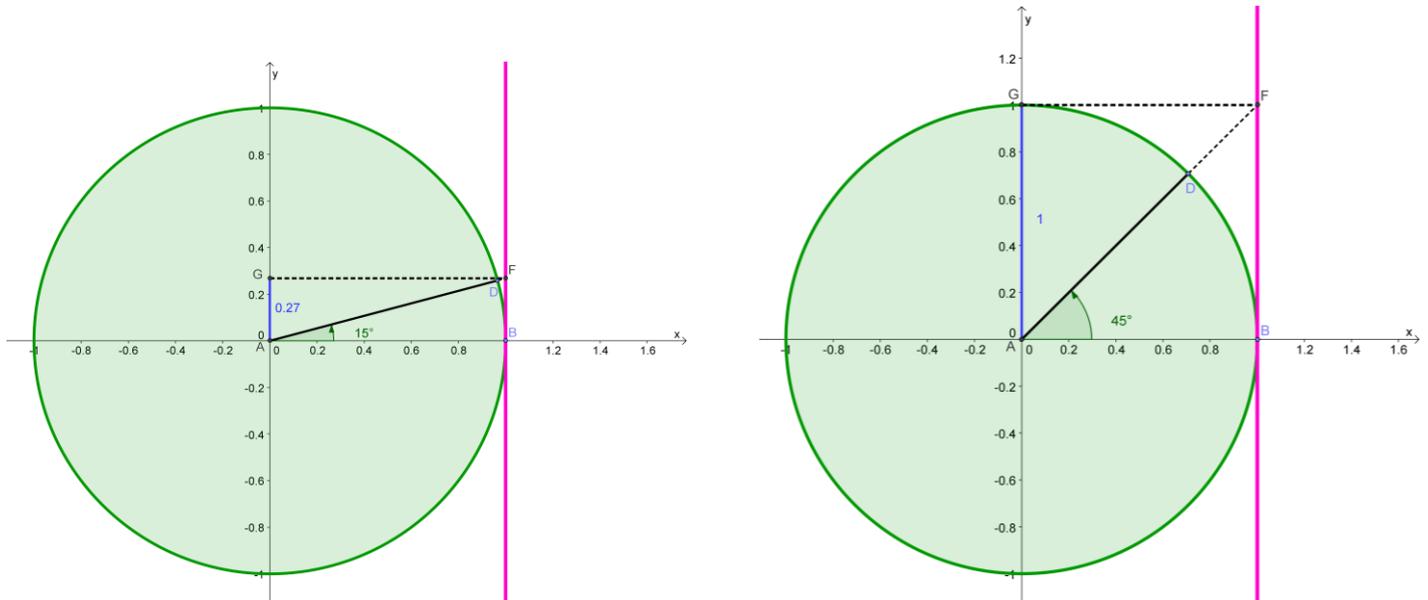
Reprenons notre angle de 42° caractérisé par la présence du point D (*Depuis le début, nous l'avons choisi comme exemple introductif*). Pour trouver la tangente de 42° , la construction s'apparente assez bien à celle du sinus. Mais d'abord, tu vas tracer **une parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point B (1,0)**. Ensuite, au lieu de projeter directement le point D sur l'axe des ordonnées, tu vas d'abord prolonger le segment [AD] jusqu'au moment où il croise la **parallèle que tu as tracée**. Appelons ce point d'intersection F. Maintenant, comme pour le sinus, tu vas projeter orthogonalement ce point F sur l'axe des ordonnées. Tu détermènes ainsi le point G. L'ordonnée de ce point, c'est la tangente de l'angle !



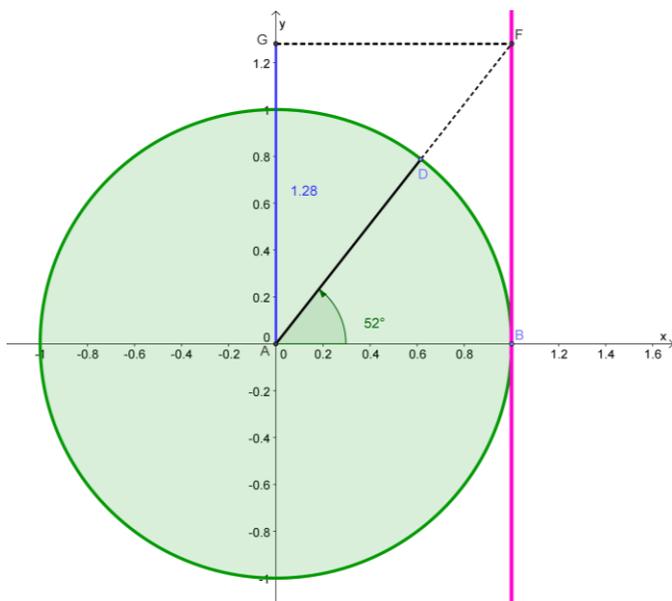
La tangente de 42° est égal à 0,9 parce que l'ordonnée du point G est 0,9

Comme toujours, c'est un grand nombre d'exemples qui te permettra d'encore mieux comprendre les choses.

Soit un angle du 1^{er} quadrant, par exemple 15° . La « procédure » expliquée ci-dessus te permet facilement de construire le point G dont l'ordonnée est 0,27. Tu en conclus donc que $\tan 15^\circ = 0,27$. Choisissons maintenant un angle de 45° . Sa tangente est égal à 1. (Eh oui, si tu es observateur, tu as tracé un carré (ABFG) de côté 1)



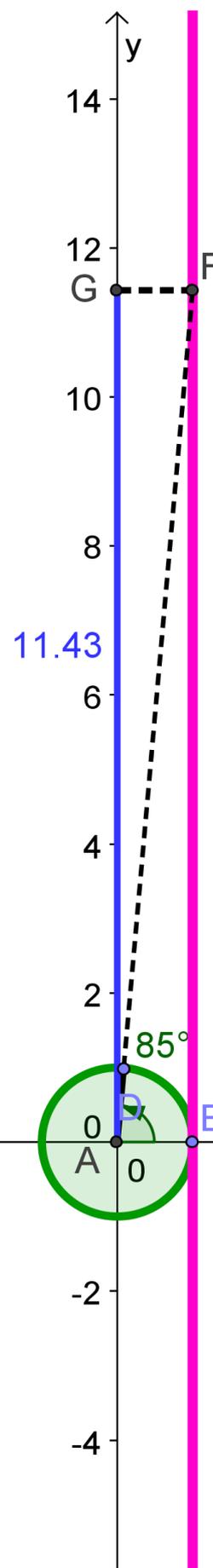
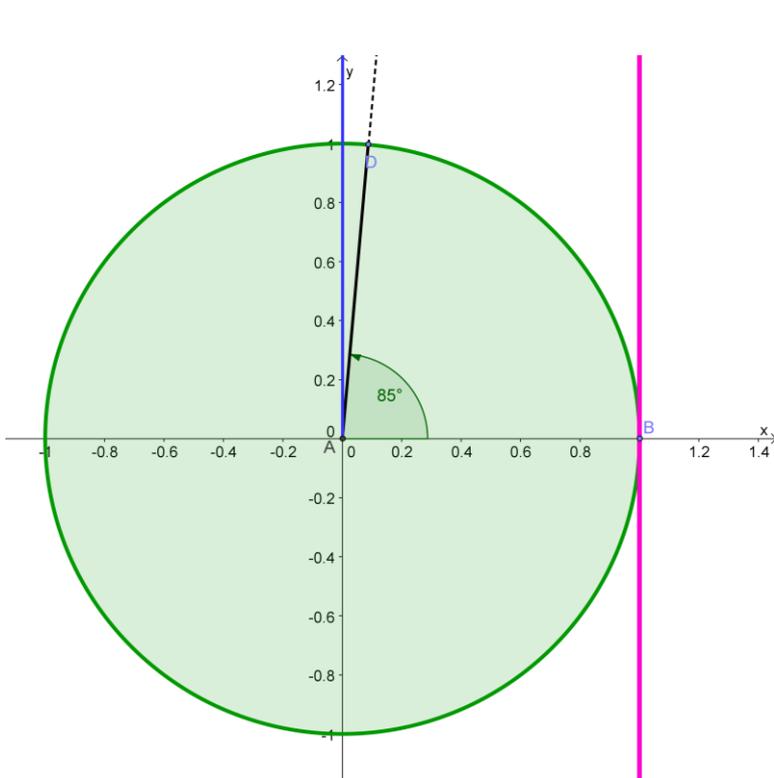
Et si l'amplitude est supérieure à 45° ?



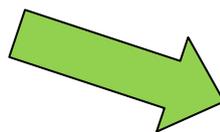
Eh oui... plus aucune limite dans la valeur de la tangente. Pour 52° , la tangente dépasse la valeur de 1, elle vaut même 1,28.

Et si l'amplitude grandit encore ?
Que vaut la tangente de 85° ?

Ouh là... Mais ça sort de mon dessin ! Ça va monter haut... Très haut même !



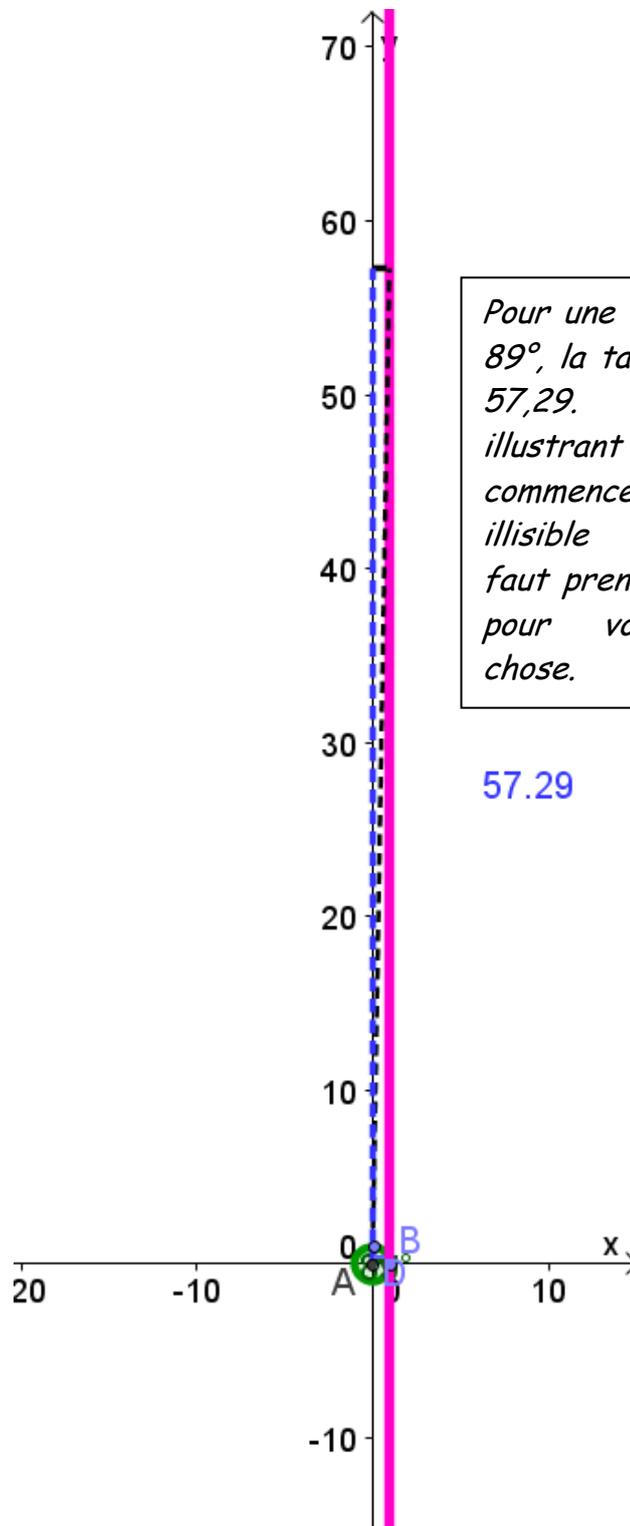
Bon, voyons les choses avec un peu de recul...



C'est le problème de la tangente. Elle peut prendre des valeurs très grandes, voire extrêmement grandes.... À la page suivante, tu peux observer ce qu'il en est !

| Angle (en degré) | tangente |
|------------------|------------|
| 85 | 11,43 |
| 86 | 14,30 |
| 87 | 19,08 |
| 87,5 | 22,90 |
| 88 | 28,64 |
| 88,5 | 38,19 |
| 89 | 57,29 |
| 89,1 | 63,66 |
| 89,2 | 71,62 |
| 89,3 | 81,85 |
| 89,4 | 95,49 |
| 89,5 | 114,59 |
| 89,6 | 143,24 |
| 89,7 | 190,98 |
| 89,8 | 286,48 |
| 89,9 | 572,96 |
| 89,91 | 636,62 |
| 89,92 | 716,20 |
| 89,93 | 818,51 |
| 89,94 | 954,93 |
| 89,95 | 1 145,92 |
| 89,96 | 1 432,39 |
| 89,97 | 1 909,86 |
| 89,98 | 2 864,79 |
| 89,99 | 5 729,58 |
| 89,991 | 6 366,20 |
| 89,992 | 7 161,97 |
| 89,993 | 8 185,11 |
| 89,994 | 9 549,30 |
| 89,995 | 11 459,16 |
| 89,996 | 14 323,94 |
| 89,997 | 19 098,59 |
| 89,998 | 28 647,89 |
| 89,999 | 57 295,78 |
| 89,9991 | 63 661,98 |
| 89,9992 | 71 619,72 |
| 89,9993 | 81 851,11 |
| 89,9994 | 95 492,97 |
| 89,9995 | 114 591,56 |
| 89,9996 | 143 239,45 |
| 89,9997 | 190 985,93 |
| 89,9998 | 286 478,90 |
| 89,9999 | 572 957,80 |

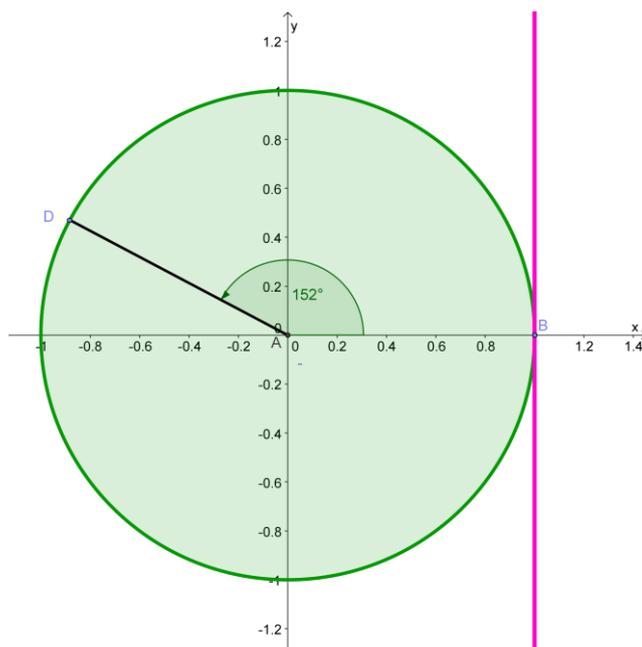
Colonne de gauche : l'amplitude de l'angle considéré (en degrés), colonne de droite, la valeur de sa tangente. Comme tu peux le constater, la montée en puissance des valeurs de la tangente est vertigineuse !



Pour une amplitude de 89°, la tangente égale 57,29. Le dessin illustrant la tangente commence à être illisible tellement il faut prendre de recul pour voir quelque chose.

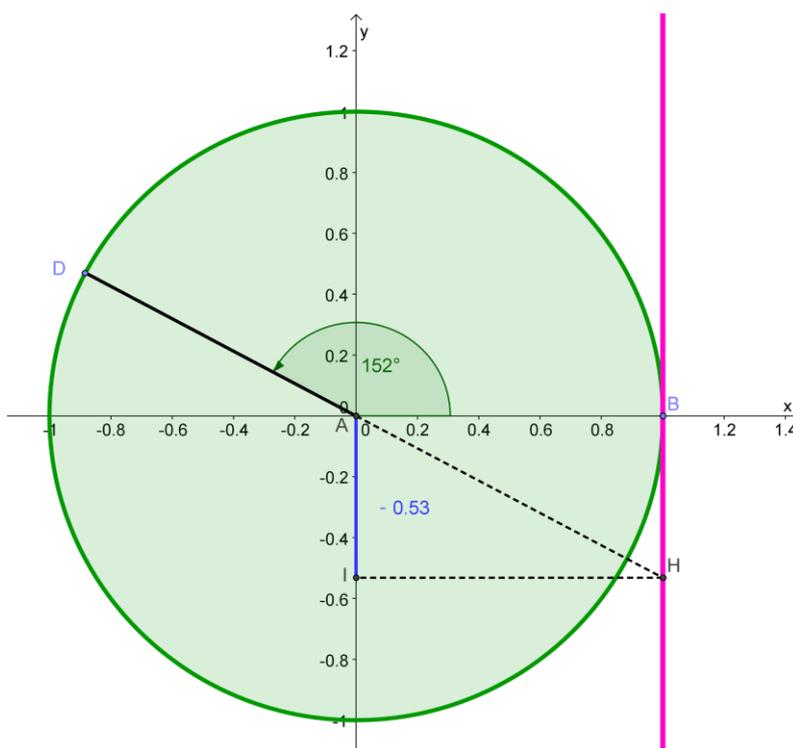
Et si l'amplitude vaut 90° ?
La tangente... n'existe pas !

Attaquons maintenant la tangente pour une amplitude d'angle compris dans le deuxième quadrant. Soit, par exemple, un angle de 152° .

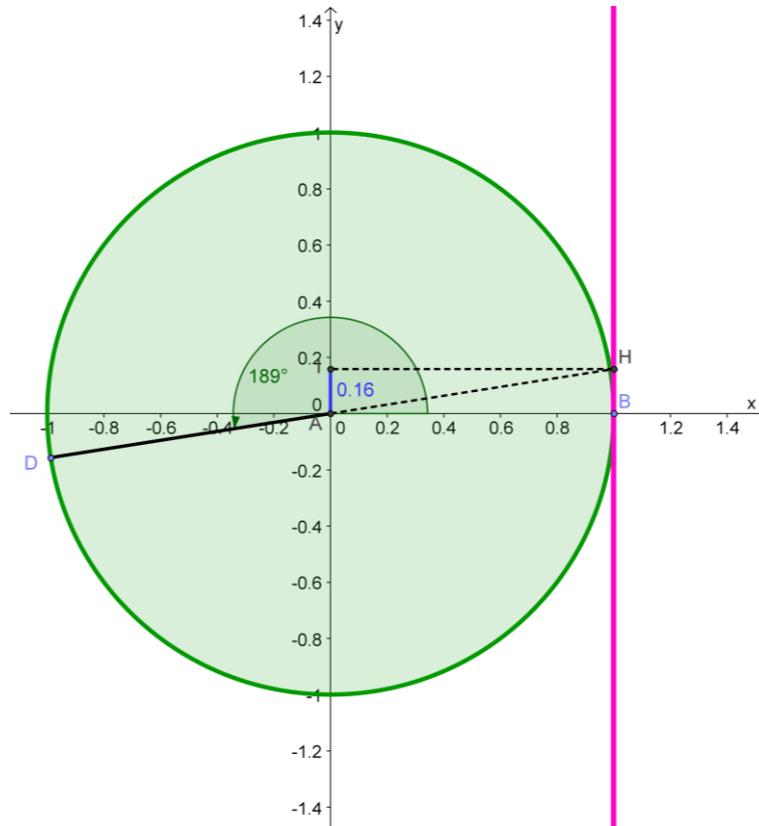


Un petit problème se pose : si tu prolonges le segment [AD] (en partant de A pour aller vers D) tu ne croieras jamais la droite verticale représentée en rose. Du coup, beaucoup d'élèves commettent l'erreur suivante : ils déplacent cette droite à la gauche du cercle. **Surtout, ne fais jamais ça !!! Quel que soit l'angle considéré, cette droite verticale est immuable et ne devra jamais être déplacée !**

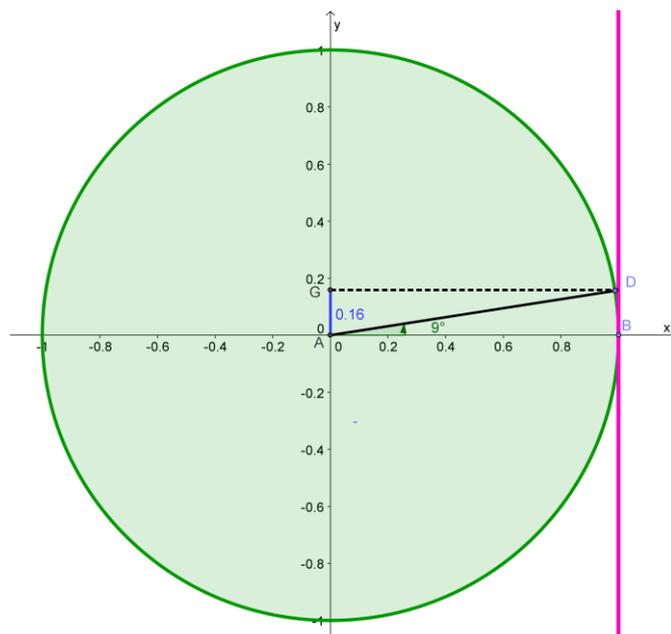
Il suffit donc de prolonger le segment [AD] de l'autre côté (en partant de D pour aller vers A). Et là, tu trouveras de nouveau un point d'intersection (ici appelé H) dont tu feras la projection orthogonale sur l'axe des ordonnées pour obtenir le point I. Et évidemment, l'ordonnée de ce point I, c'est la valeur de la tangente (qui est négative dans ce quadrant !)



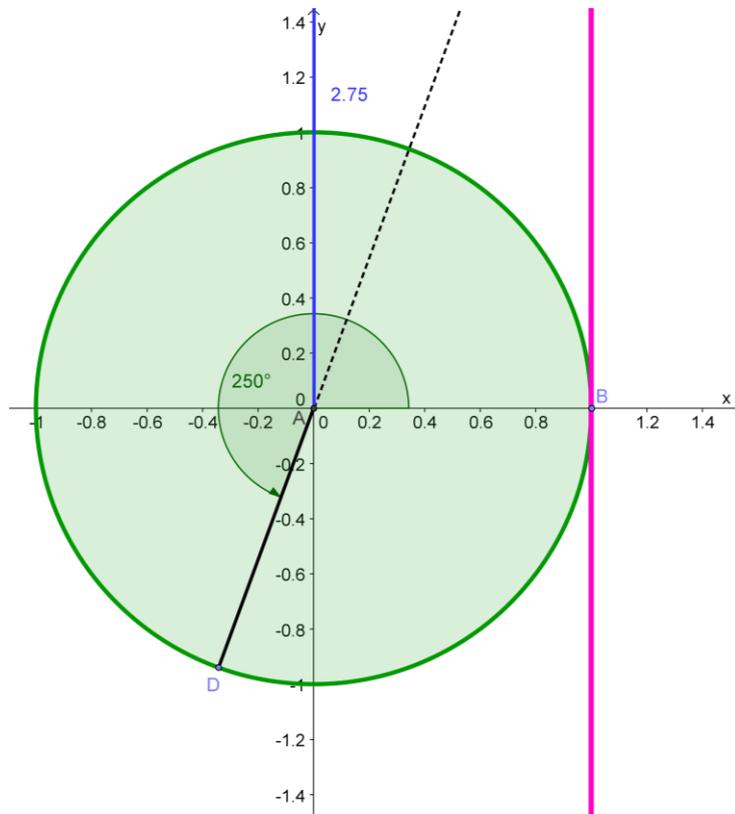
Pour un angle du 3^e quadrant, c'est la même technique : tu prolonges le segment [AD] (en partant de D pour aller vers A). Tu obtiens ainsi le point d'intersection H. Tu projettes sur l'axe des ordonnées afin de déterminer le point I. Et tu prends son ordonnée. C'est ainsi que la tangente de $189^\circ = 0,16$.



Petite réflexion (que tu te seras peut-être faite) en passant : la tangente de 189° est la même que la tangente de 9° . En effet :



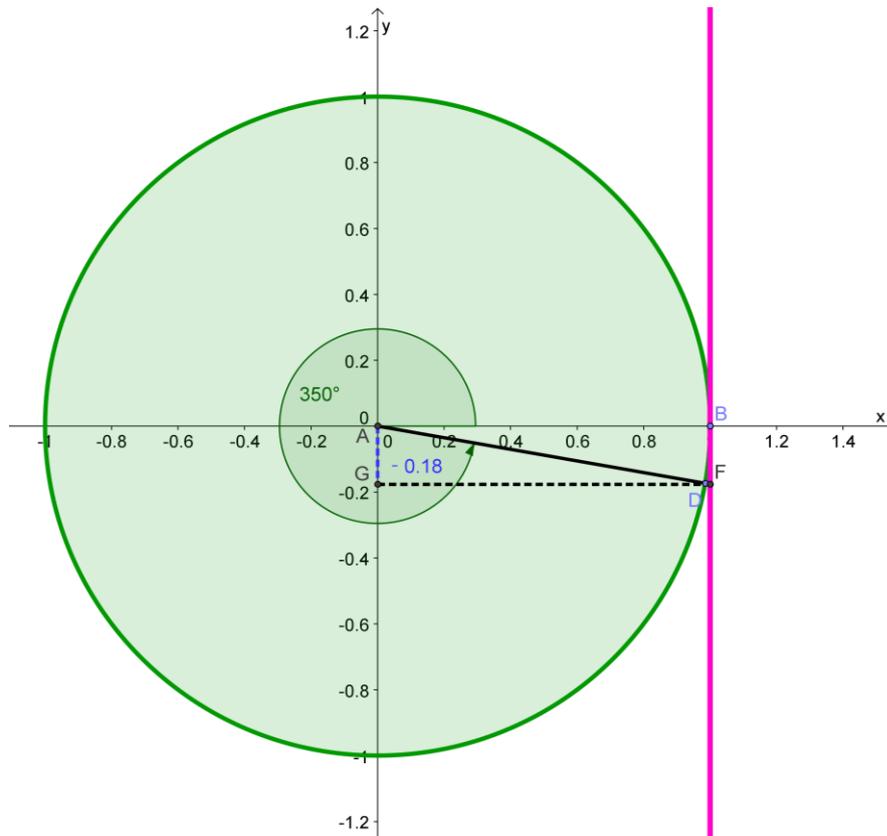
Pour des valeurs d'amplitudes d'angles se rapprochant de 270° , les tangentes grimperont de nouveau de manière phénoménale. Pour 250° , c'est encore une valeur raisonnable de 2,75 (valeur raisonnable.. mais qui devient déjà délicate d'illustrer)



Mais comme te l'indique le tableau ci-dessous, dès que tu t'approches de 270° , c'est l'ascension !

| angle (en degré) | tangente |
|------------------|------------|
| 265 | 11,43 |
| 266 | 14,30 |
| 267 | 19,08 |
| 267,5 | 22,90 |
| 268 | 28,64 |
| 268,5 | 38,19 |
| 269 | 57,29 |
| 269,5 | 114,59 |
| 269,9 | 572,96 |
| 269,99 | 5 729,58 |
| 269,999 | 57 295,78 |
| 269,9999 | 572 957,80 |

Pour un angle du quatrième quadrant, en général, il n'y a pas d'erreur : il suffit de prolonger le segment [AD] en allant de A vers D. Sauf peut-être que parfois, tu oublieras que la valeur de la tangente est négative. Ainsi $\tan 350^\circ = -0.18$



Et voilà... En principe, tu devrais maintenant être un maître de la tangente !

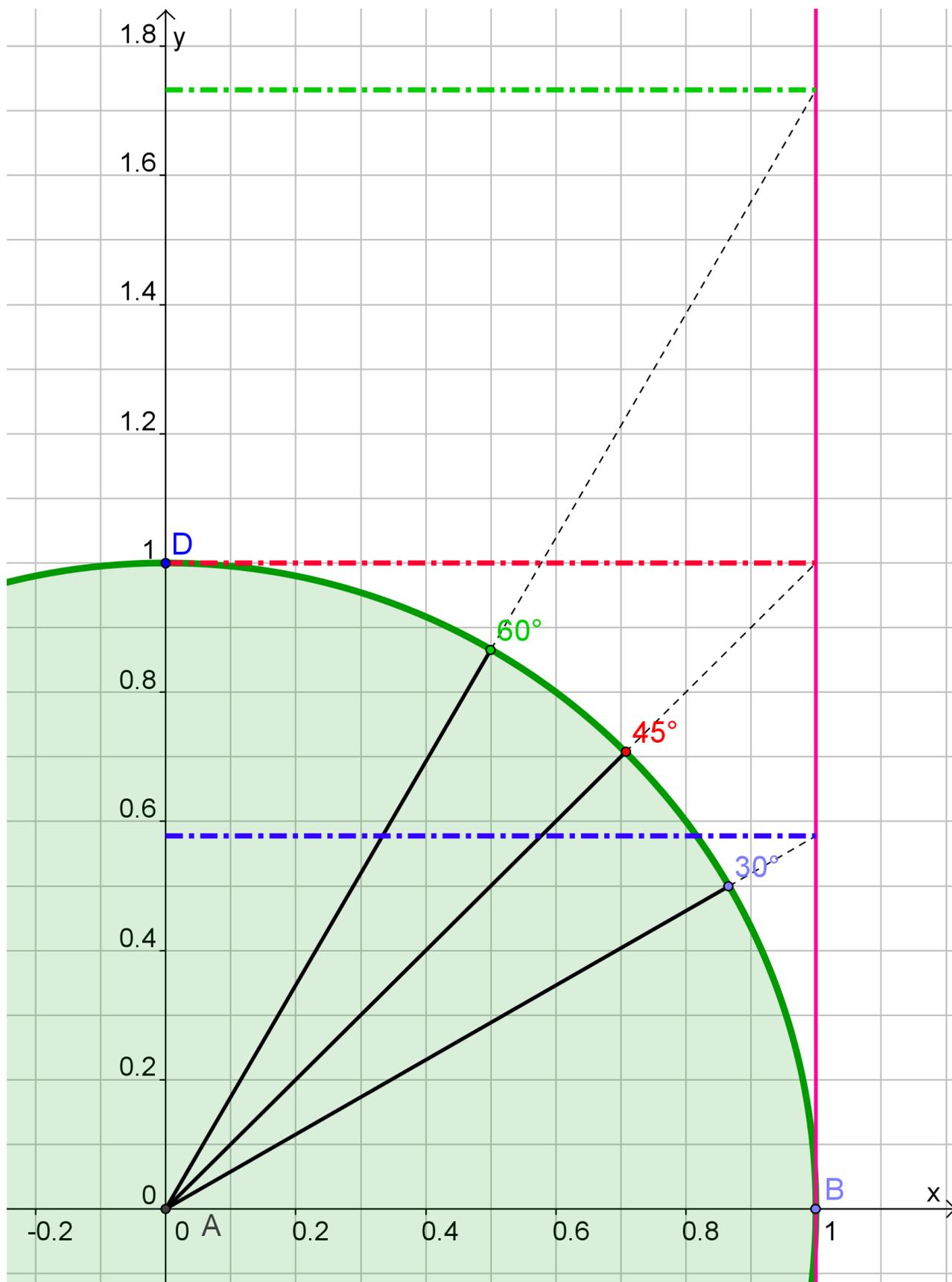
Les quatre valeurs suivantes sont donc très faciles à retrouver :

| | | | |
|--------------------|------------------------------|----------------------|-------------------------------|
| $\tan 0^\circ = 0$ | $\tan 90^\circ$ n'existe pas | $\tan 180^\circ = 0$ | $\tan 270^\circ$ n'existe pas |
|--------------------|------------------------------|----------------------|-------------------------------|

Tiens, une deuxième petite réflexion en passant. À ton avis, combien vaut le sinus de 350° ? Difficile de le dire avec exactitude mais la valeur ne doit pas être très éloignée de la tangente ! En effet : $\sin 350^\circ = -0,173\dots$ tandis que $\tan 350^\circ = -0,176\dots$

Eh oui : pour des angles proches de 0° (à un tour de cercle près), la tangente sera toujours très proche du sinus. On peut même aller encore un tout petit peu plus loin dans la réflexion : si c'est un angle du premier quadrant, la valeur de la tangente sera légèrement supérieure à celle du sinus mais si c'est un angle du quatrième quadrant, la tangente sera légèrement inférieure du fait qu'on travaille avec des nombres négatifs.

Pour cloturer cette section consacrée à la tangente, il ne te reste plus qu'à aborder les valeurs des angles remarquables : 30° , 45° et 60°



$$\tan 30^\circ = 0.577\dots = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\tan 60^\circ = 1.732\dots = \sqrt{3}$$