Arrangements – Permutations

Enoncés

1. Une mère de 8 enfants désire se faire aider par l'un de ses enfants pour chacune des tâches suivantes : la vaisselle, le lavage et les courses. De combien de façons peut-elle choisir ses enfants si :

a) aucun des enfants ne peut effectuer deux tâches ?
b) chaque enfant peut effectuer une tâche ou plus ?
c) aucun enfant ne peut effectuer 2 tâches mais Roméo est trop petit pour faire les courses ?

2. On dispose de 6 plaquettes sur lesquelles sont inscrits les chiffres 2, 4, 5, 6, 8 et 9. Combien de nombres distincts peut-on former en les utilisant tous une seule fois ?

3. On dispose de 4 plaquettes sur lesquelles sont inscrits les chiffres 3, 4, 7 et 9. Combien de nombres distincts peut-on former en les utilisant tous une seule fois ?

4. Une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres (éventuellement répétées le même nombre de fois) : par exemple REVISE et SERVIE sont des anagrammes de EVIERS, on considère que ESEIVR en est une autre, bien que ce mot n'ait aucun sens.

a) Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ?
b) Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?
c) Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?
d) Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

Arrangements

Corrigés

1.Arrangements avec répétitions

a) Définition :

On appelle **arrangements avec répétitions** de m lettres prises n à n ($n \leq m$) tous les groupes de n lettres choisies parmi les m lettres données et placées dans un **ordre** donné, chaque lettre pouvant figurer plusieurs fois dans un même groupe : $\boldsymbol{\alpha_m^n}$ = nombre de ces groupes.

b) Formule :

$$\boldsymbol{\alpha_m^n = m^n}$$

2.Arrangements sans répétitions

a) Définition :

On appelle **arrangements sans répétitions** de m lettres distinctes prises n à n ($n \leq m$) tous les groupes de n lettres distinctes choisies parmi les m lettres données et placées dans un **ordre** donné: $\boldsymbol{A_m^n}$ = nombre de ces groupes.

c) Formule :

$$\boldsymbol{A_m^n = m.(m-1).(m-2)...(m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}}$$

3.Corrigés

1. Une mère de 8 enfants désire se faire aider par l'un de ses enfants pour chacune des tâches suivantes : la vaisselle, le lavage et les courses. De combien de façons peut-elle choisir ses enfants si :

a) aucun des enfants ne peut effectuer deux tâches ?

$$\boldsymbol{A_8^3 = 336}$$

b) chaque enfant peut effectuer une tâche ou plus ?

$$\boldsymbol{\alpha_8^3 = 8^3 = 512}$$

c) aucun enfant ne peut effectuer 2 tâches mais Roméo est trop petit pour faire les courses ?

$$\boldsymbol{2.A_7^2 + A_7^3 = 84 + 210 = 294}$$

Permutations

Corrigés

1.Permutations avec répétitions

Considérons m_1 lettres a ; m_2 lettres b, … : $m_1+m_2+\ldots = m$.

a) Définition :

On appelle **permutations avec répétitions** de ces m lettres tous les groupes de ces m lettres, rangées dans un **ordre** déterminé : $\mathbf{p_m^{m_1,m_2,\ldots}}$ = nombre de ces groupes.

b) Formule :

$$\boxed{\mathbf{p_m^{m_1,m_2,\ldots} = \frac{m!}{m_1!\; m_2!\; \ldots}}}$$

2.Permutations sans répétitions

a) Définition :

On appelle **permutations sans répétitions** de m lettres **distinctes** tous les groupes de ces m lettres, rangées dans un **ordre** déterminé : $\mathbf{P_m = A_m^m}$ = nombre de ces groupes.

b) Formule :

$$\boxed{\mathbf{P_m = m!}}$$

3.Corrigés

2. On dispose de 6 plaquettes sur lesquelles sont inscrits les chiffres 2, 4, 5, 6, 8 et 9. Combien de nombres distincts peut-on former en les utilisant tous une seule fois ?

m = 6 répétitions : non

$$\mathbf{P_6 = 6! = 720}$$

3. On dispose de 4 plaquettes sur lesquelles sont inscrits les chiffres 3, 4, 7 et 9. Combien de nombres distincts peut-on former en les utilisant tous une seule fois ?

m = 4 répétitions : non

$$\mathbf{P_4 = 4! = 24}$$

4. Une anagramme d'un mot est un mot qui contient les mêmes lettres (éventuellement répétées le même nombre de fois) : par exemple REVISE et SERVIE sont des anagrammes de EVIERS, on considère que ESEIVR en est une autre, bien que ce mot n'ait aucun sens.

a) Combien CHERS a-t-il d'anagrammes ?

CHERS contient cinq lettres distinctes. Le nombre d'anagrammes est donc: **5! = 120**.

b) Combien CHERE a-t-il d'anagrammes ?

CHERE contient aussi cinq lettres, mais il y a deux E.
Le nombre d'anagrammes de CHERE est égal à : **(5!) / (2!) = 60**.

c) Combien CHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

CHERCHER contient huit lettres. On doit diviser 8! par $(2!)^4$ (une fois parce qu'une permutation des deux E ne modifie pas une anagramme, une fois à cause des deux R, une autre à cause des deux C, une dernière à cause des deux H).
On a donc : $\mathbf{(8!) / (2!)^4 = 2\,520}$ anagrammes.

d) Combien RECHERCHER a-t-il d'anagrammes ?

RECHERCHER contient 10 lettres dont 3 R, 3 E, 2 C et 2 H. Le nombre d'anagrammes est donc :
(10!) / (3! × 3! × 2! × 2!) = **25 200** anagrammes.