# Chapitre I : Coordonnées d’un point

NB : dans ce cours, les points sont nommés par des minuscules et les droites par des majuscules.

§1.Définitions

Considérons un repère orthonormé de l’espace et un point p quelconque :



Projetons le point p : sur X, parallèlement à YZ → p1

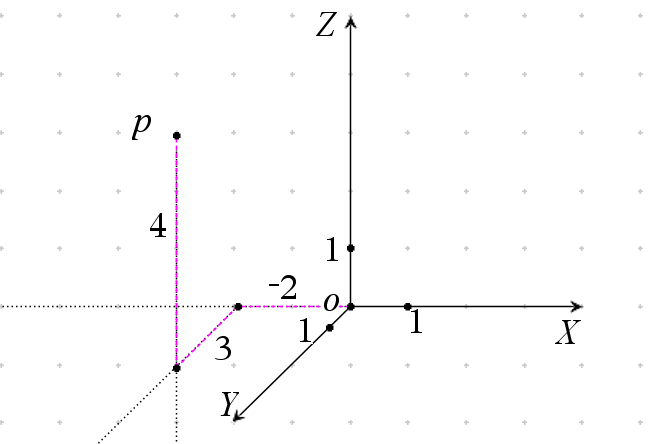
sur Y, parallèlement à XZ → p2

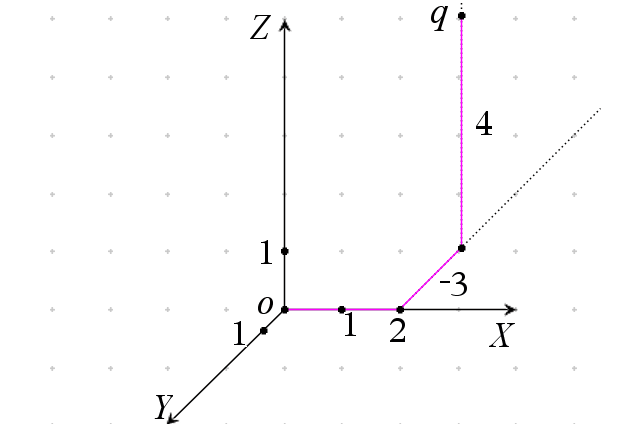
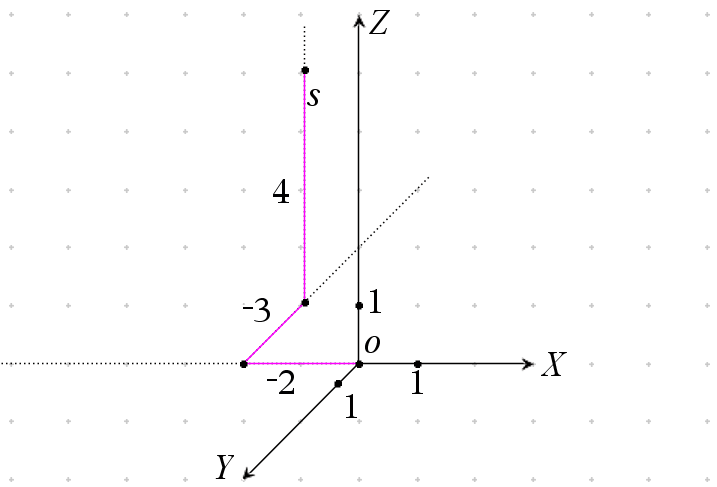
sur Z, parallèlement à XY → p3

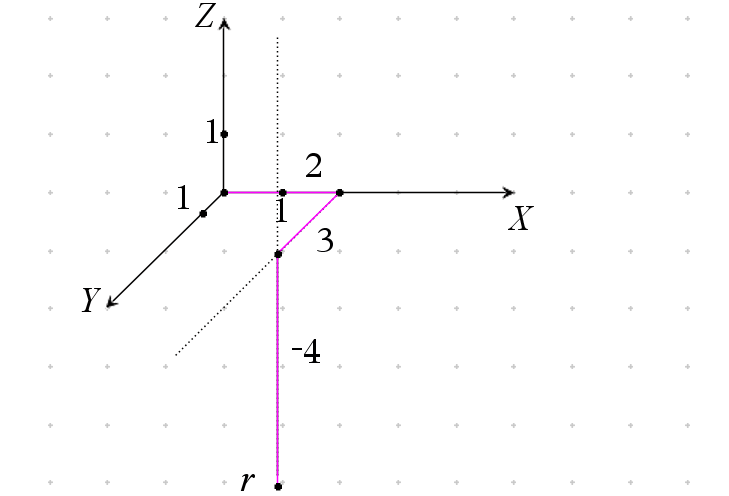
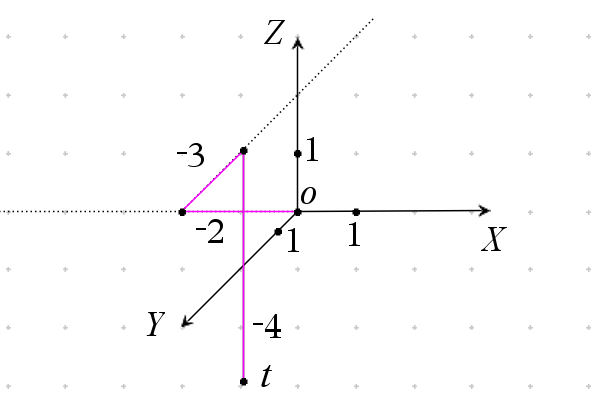
**(x, y, z) est la coordonnée du point p dans le repère orthonormé (o, uX, uY, uZ) de l’espace.**

§2.Exercices

1) Dans un repère orthonormé de l’espace, représenter, en perspective cavalière ( 45°, ½) les points suivants : p(-2, 3,4) ; q(2,-3,4) ; r(2,3,-4) ; s(-2,-3,4) ; t(-2,-3,-4).



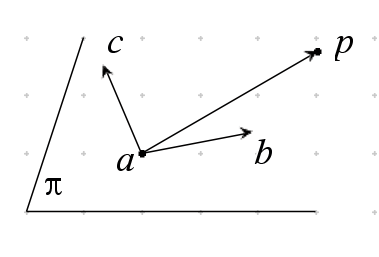




Chapitre II : Equations d’un plan

§1. Equations vectorielles d’un plan

Considérons le plan, un point a de ce plan et deux vecteurs non colinéaires de ce plan :



Soit p un point quelconque de l’espace : r, s ∈ R

§2. Equations paramétriques d’un plan

Dans un repère donné de l’espace : p(x, y, z) ; a(xa, ya, za) ; b(xb, yb, zb) ; c(xc, yc, zc)

r, s ∈ R

§3. Equations cartésiennes d’un plan

En éliminant r et s des équations paramétriques, on obtient une équation cartésienne du plan :

Remarques : 1)  k ( est aussi une équation cartésienne de.

2) plans particuliers :

Différentes méthodes pour déterminer une équation cartésienne d’un plan passant par 3 points : 1) écrire les équations paramétriques et éliminer les paramètres ;

2) exprimer que chaque point vérifie l’équation a.x + b.y + c.z + d = 0 et résoudre le système obtenu ;

3) utiliser un déterminant :

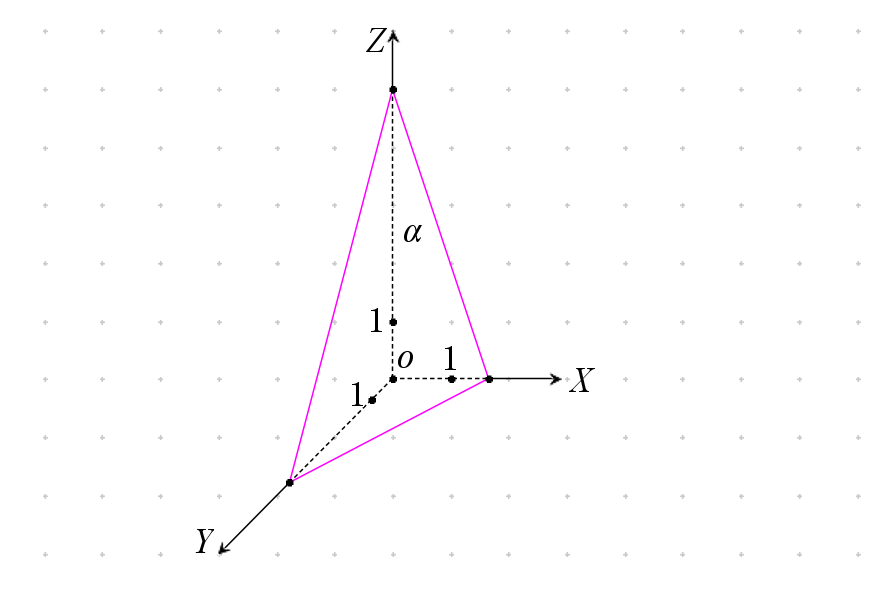
§4.Exercices

2) Ecrire des équations paramétriques du plan α passant par les points p(1,2,0) ; q(2,0,-1) et r(1,1,1). En déduire une équation cartésienne de α. Etablir une représentation graphique de α.

* Equations paramétriques : r, s ∈ R

* Equation cartésienne : éliminons les paramètres r et s

* Représentation graphique :
* Sur X : y = z = 0, on a le point (5/3, 0,0)
* Sur Y : x = z = 0, on a le point (0, 5,0)
* Sur Z : y = x = 0, on a le point (0, 0,5)

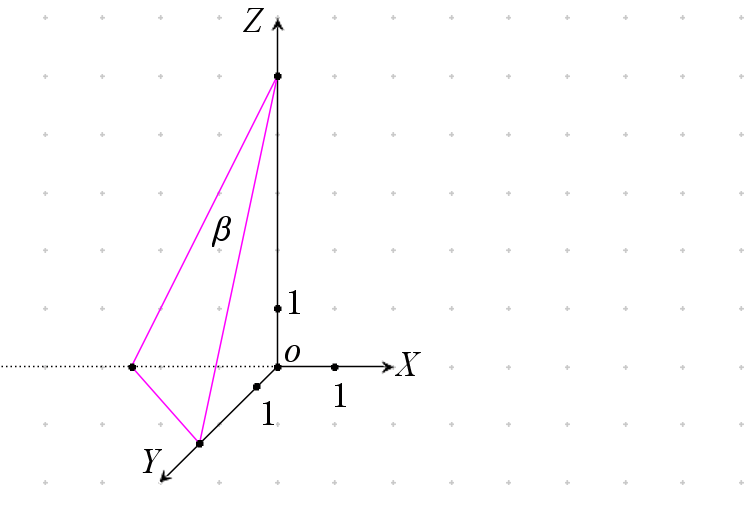


3) Ecrire une équation cartésienne du plan β passant par les points p(0,3,1) ; q(0,0,5) et

r(-2,0,1). Etablir une représentation graphique deβ.

* Equation cartésienne :

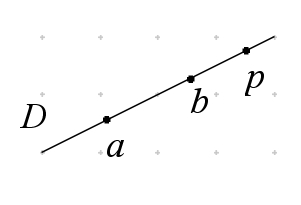
* Représentation graphique :
* Sur X : y = z = 0, on a le point (-5/2, 0,0)
* Sur Y : x = z = 0, on a le point (0, 15/4,0)
* Sur Z : on a le point q (0, 0,5)



Chapitre III : Equations de droites

§1.Equations vectorielles d’une droite

Une droite est déterminée par 2 points distincts a et b : D = ab



est le vecteur directeur de la droite D

§2.Equations paramétriques d’une droite

Dans un repère donné de l’espace : p(x, y, z) ; a(xa, ya, za) ; b(xb, yb, zb) :

§3.Equations cartésiennes d’une droite

En éliminant k des équations paramétriques et si on obtient :

Cas particuliers : pour tous les cas :

a) Si alors D // plan YZ

b) Si alors D // plan XZ

c) Si alors D // plan XY

d) Si alors D // axe Z

e) Si alors D // axe Y

f) Si alors D // axe X

§4.Exercices

4) On donne les points a(1,1,1) ; b(2,3,4) ; c(3,-1,4) ; p(3,0,-3) et q(5,1,-6). Déterminer :

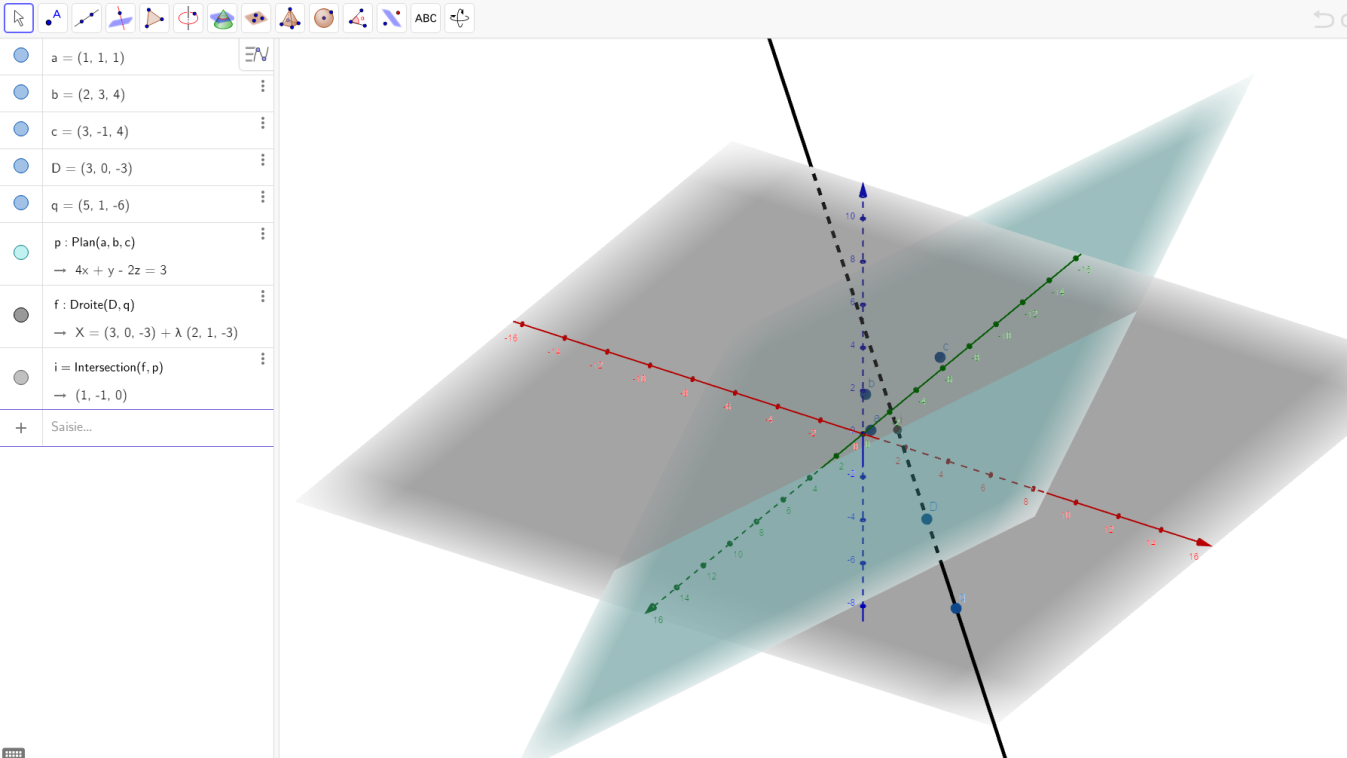
- une équation cartésienne du plan abc ;

- des équations paramétriques de la droite pq.

En déduire la coordonnée du point d’intersection i de la droite et du plan.



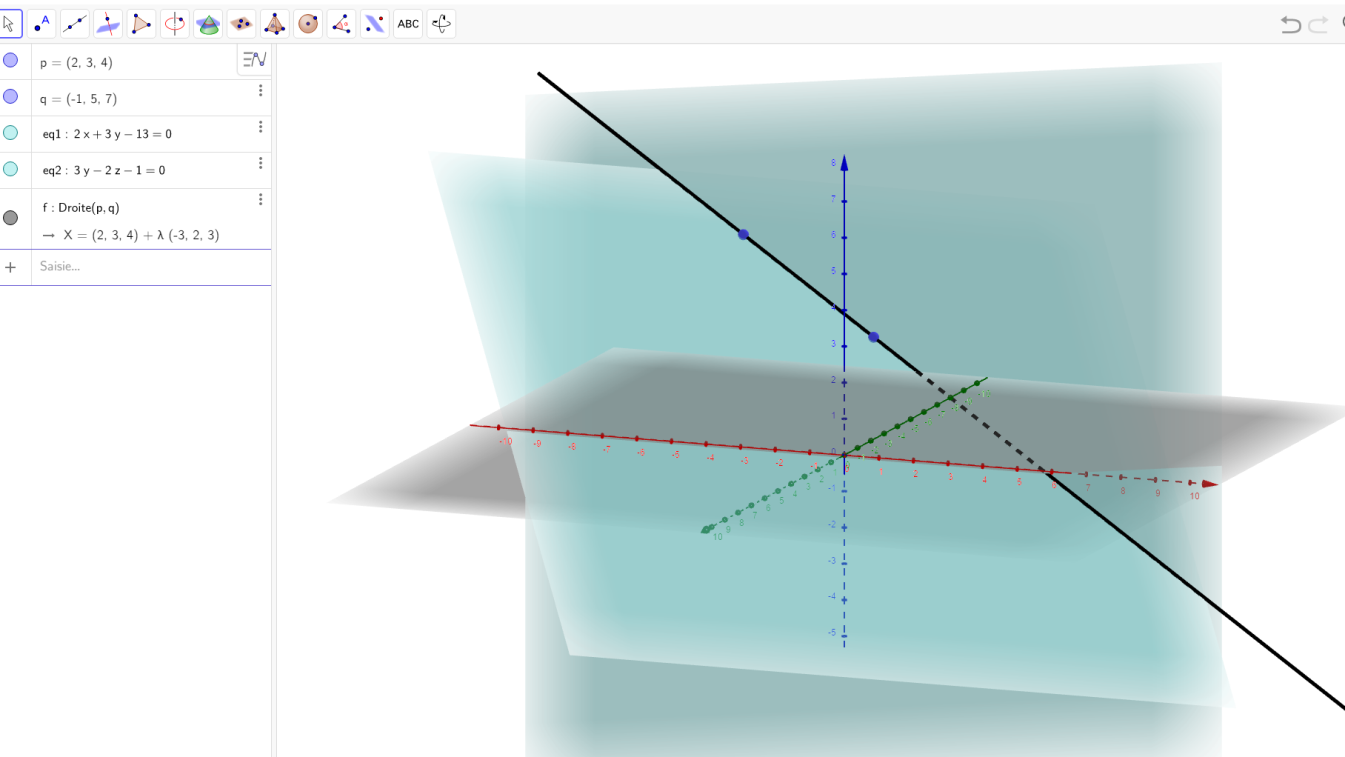

* **i (1,-1,0)**
* Représentation graphique : logiciel gratuit Geogebra Calculatrice 3D



5) Déterminer un système d’équations cartésiennes des droites passant par :

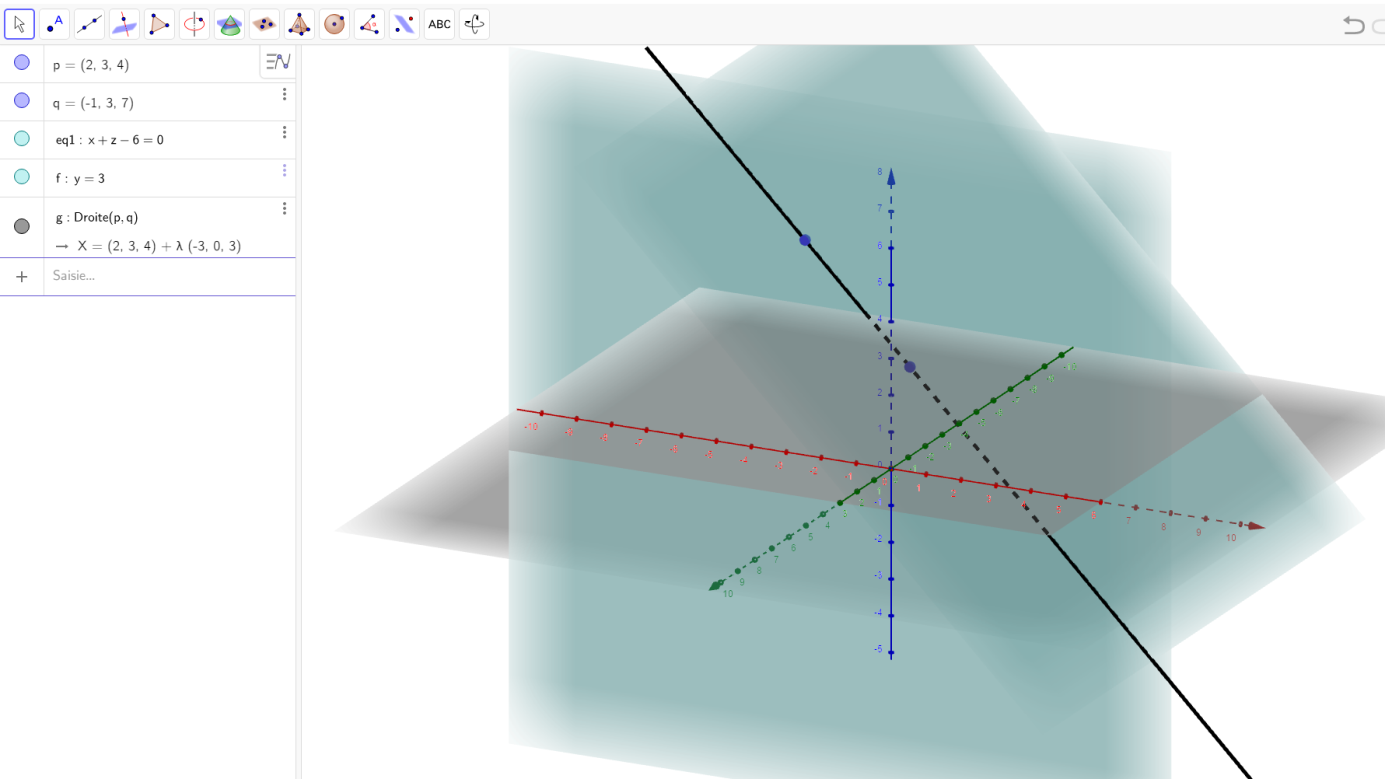
a) p(2,3,4) et q(-1,5,7)



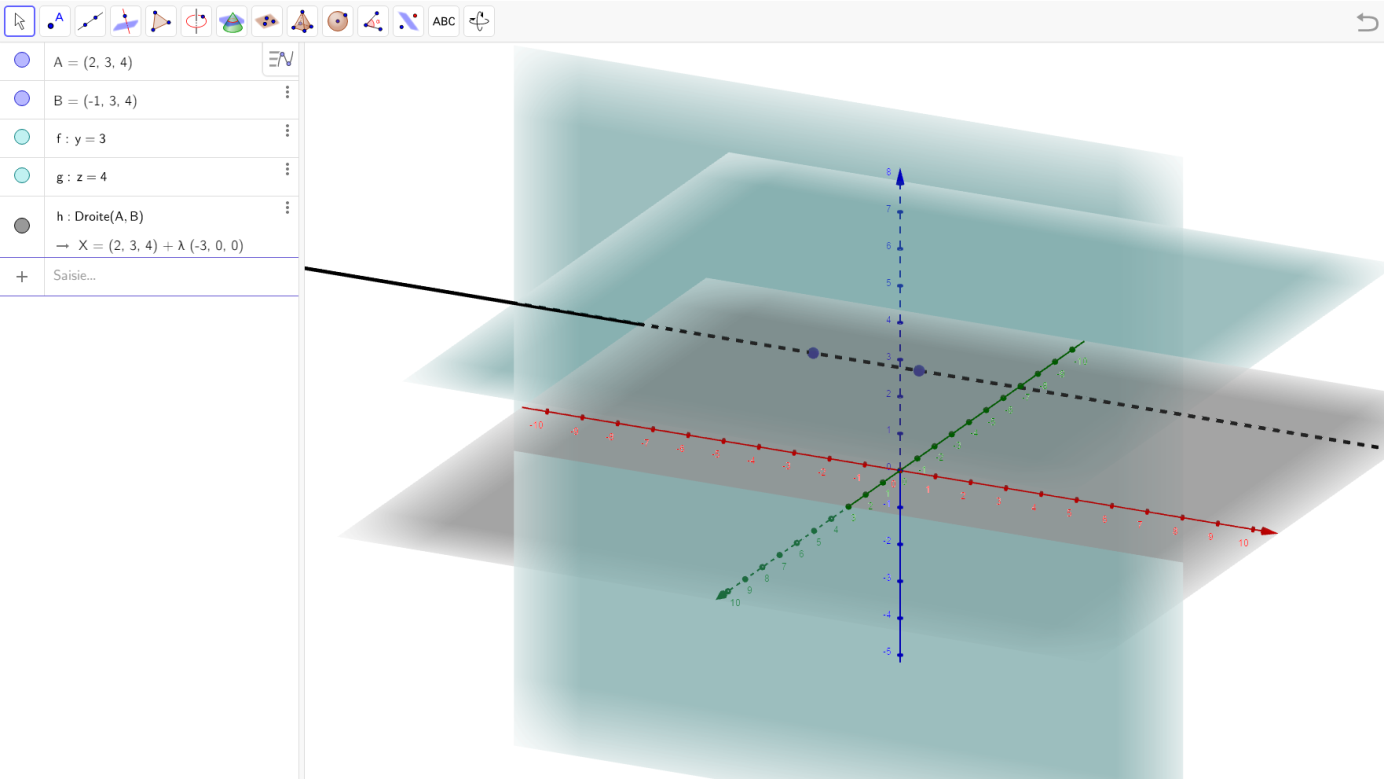


b) p(2,3,4) et q(-1,3,7)





c) p(2,3,4) et q(-1,3,4).



Chapitre IV : Conditions de parallélisme

§1.Propriétés

1.Vecteurs perpendiculaires-vecteurs colinéaires

Dans un repère orthonormé de l’espace : 

|  |
| --- |
| a.a’+b.b’+c.c’=0 |

a) ****

b)  sont **colinéaires** ⇔  est un multiple de 

⇔ 

⇔ 

|  |
| --- |
|  |

Si a, b et c sont non nuls, on peut écrire:

2.Vecteur perpendiculaire à un plan

**Dans un repère orthonormé,**

**le plan α≡ax+by+cz+d=0 est perpendiculaire au vecteur (a,b,c).**

Le vecteur **** est appelé vecteur **normal** au planα.

Démonstration :

* α ≡ ax+by+cz+d=0 (1)
* Considérons un point p(xp,yp,zp) de α : (2)
* (1) – (2) ⇒ (3)

On peut considérer que : 1) (a,b,c) est la coordonnée d’un vecteur ** ;**

2) (x,y,z) est la coordonnée d’un point quelconque de α

donc (x-xp, y-yp, z-zp) est la coordonnée d’un vecteur quelconque de α

et l’égalité (3) exprime que ****est perpendiculaire à α.§2.Droites parallèles

Soit la droite D=ab de vecteur directeur ****(xb-xa,yb-ya,zb-za) ;

la droite D’=cd de vecteur directeur ****(xd-xc,yd-yc,zd-zc).

Les droites D et D’ sont parallèles ssi les vecteurs  et  sont colinéaires c’est-à-dire que si ****n’a pas de composante nulle :

|  |
| --- |
| **D//D’** |

§3.Plans parallèles

**dans un repère orthonormé**

Soit le plan α≡ax+by+cz+d=0 de vecteur normal ****(a,b,c) ;

le plan β≡a’x+b’y+c’z+d’=0 de vecteur normal **** (a’,b’,c’).

|  |
| --- |
| **α // β** |

Les plans α et β sont parallèles ssi **** et **** sont parallèles c’est-à-dire que si ****n’a pas de composante nulle :

§4.Droite et plan parallèles

**dans un repère orthonormé**

Soit la droite D=pq de vecteur directeur ****(xq-xp,yq-yp,zq-zp) ;

le plan α≡ax+by+cz+d=0 de vecteur normal ****(a,b,c).

La droite D et le plan α sont parallèles ssi **** et **** sont perpendiculaires c’est-à-dire :

|  |
| --- |
| **D // α** **⇔ a.(xq-xp)+ b.(yq-yp) + c.(zq-zp)=0** |

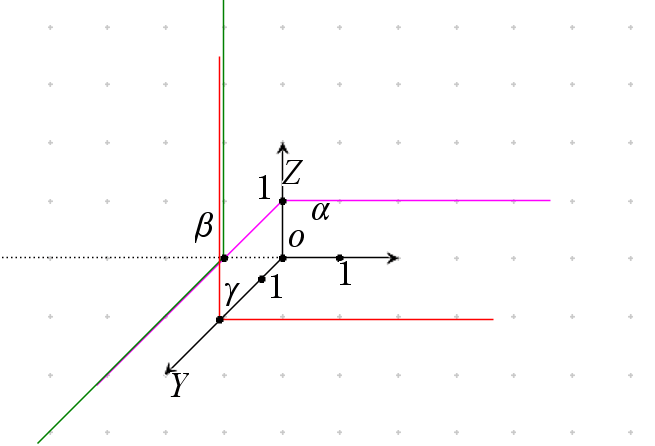
§5.Exercices

6) Dans un repère orthonormé de l’espace, écrire une équation cartésienne des plans suivants et les représenter graphiquement :

a) α : p(2,3,1) ∈ α // XY :

b) β : q(-1,2,4) ∈ β // YZ :

c) γ : t(-1,3,1) ∈ γ // XZ :



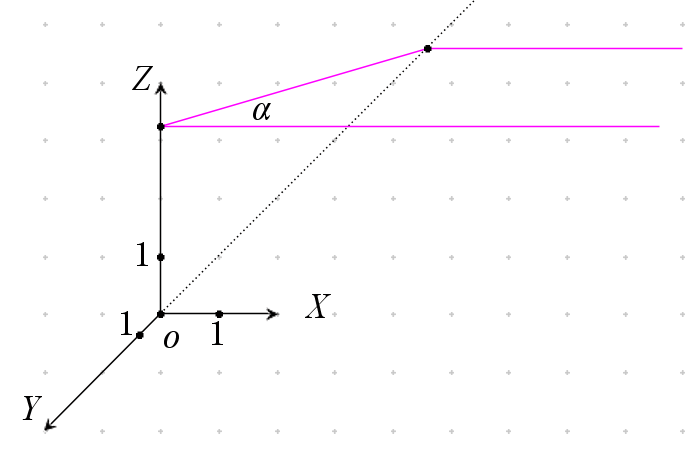
7) Dans un repère orthonormé de l’espace, écrire une équation cartésienne des plans suivants et les représenter graphiquement :

1. α // X et passant par les points p1(2,-1,3) et q1(-1,3,4) :

* α // X

⇔ ⇔

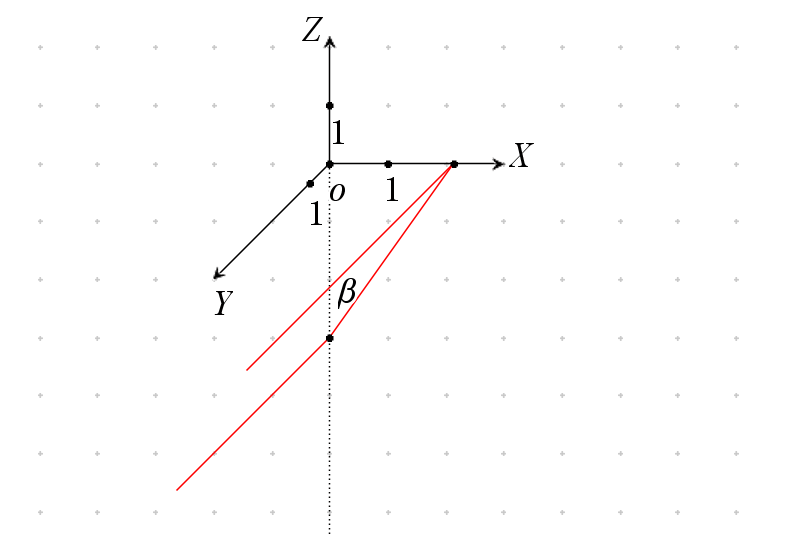
Prenons d = 13, alors c = -4 et b = 1 :

* Représentation graphique :

b) β // Y et passant par les points p2(5,-2,4) et q2(0,-1,-3) :

* β // Y

Prenons d = 3, alors c = 1 et a = -7/5 : ⇔

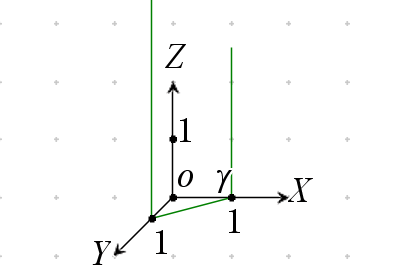
* Représentation graphique :

c) γ // Z et passant par les points p3(-2,3,-1) et q3(-3,4,7) :

* γ // Z

⇔

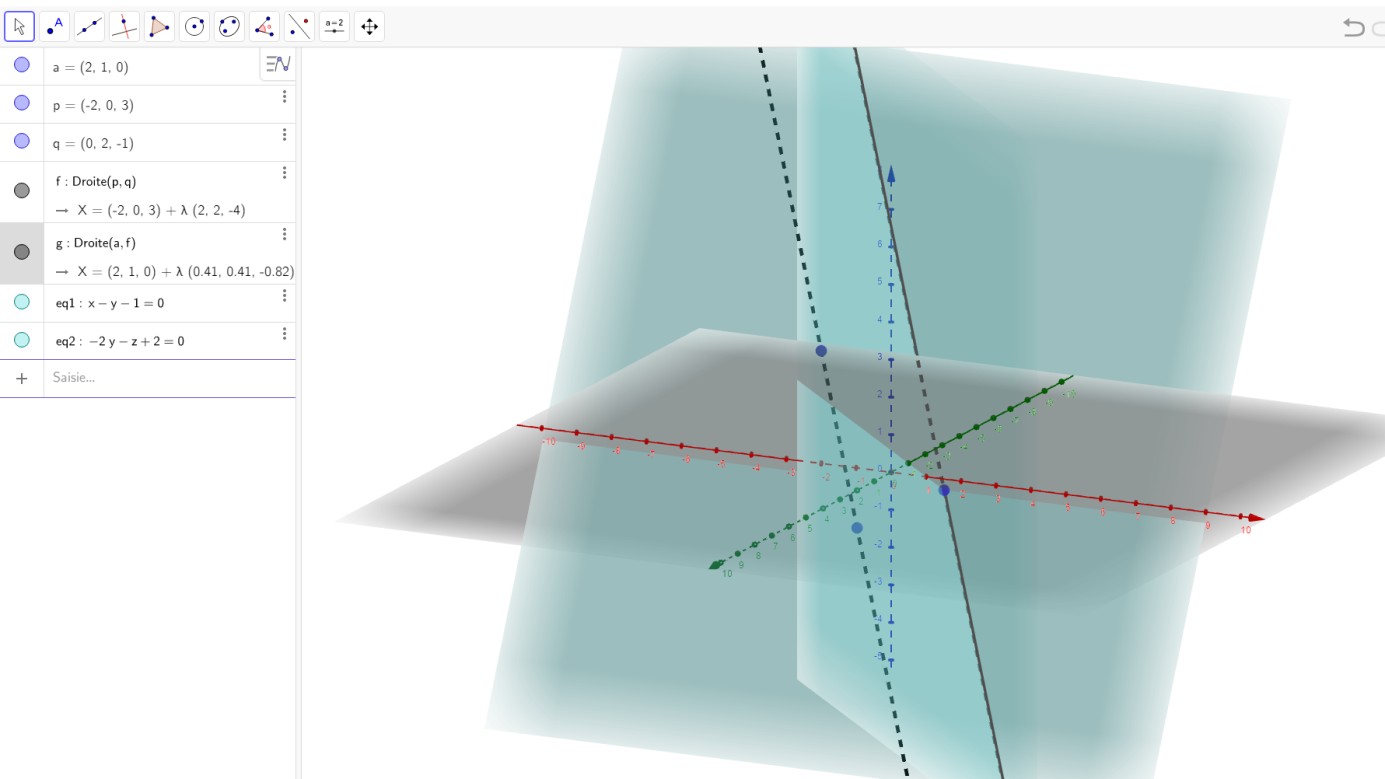
Prenons d = -1, alors a = b = 1 :

* Représentation graphique :

8) Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite D', passant par le point a(2,1,0) et // D=pq : p(-2,0,3) et q(0,2,-1).

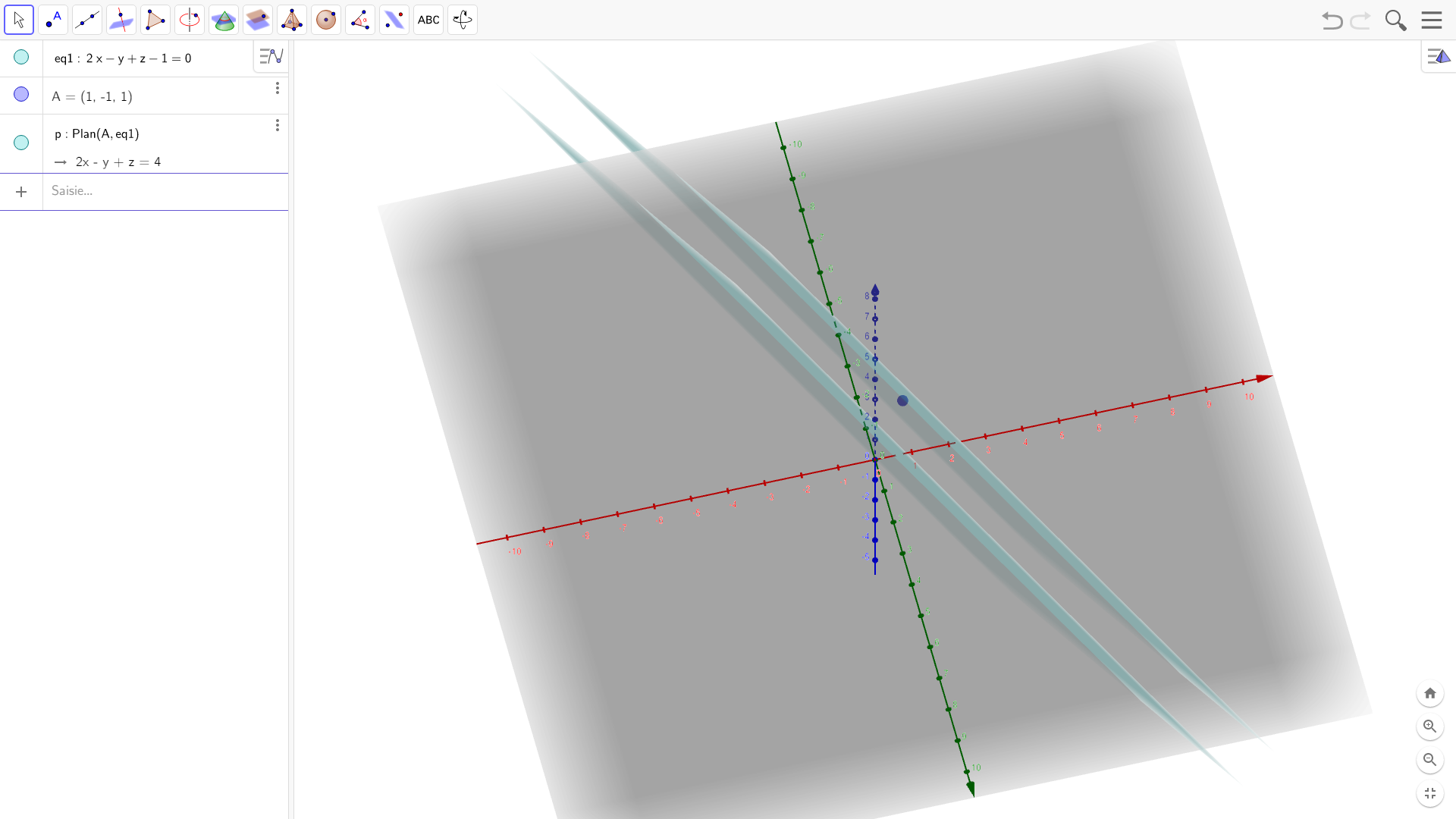
* D’ // D ⇔
* Prenons k=1:
* ⇔

⇔ ⇔



9) Déterminer une équation cartésienne du plan α' passant par a(l,-l, l) et // α≡2x-y+z-l=0.

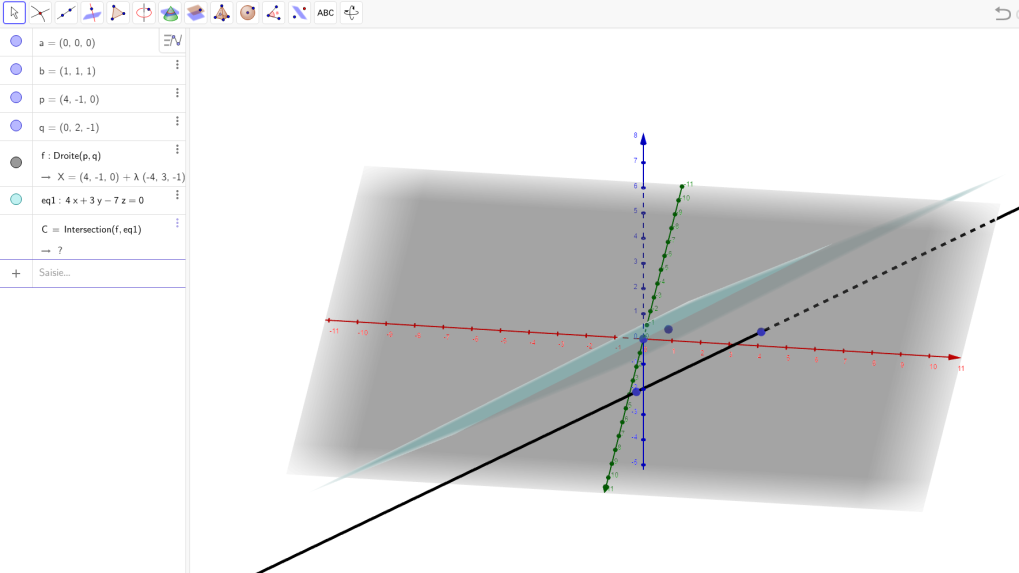
* α’ // α ⇔
* Prenons k=1:
* ⇔



10) Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par les points a(0,0,0), b(l,l,l) et parallèle à D=pq: p(4,-1,0) et q(0,2,-1).

* :
* //

Prenons b = 3, alors a = 4 et c = -7



Chapitre V : Conditions de perpendicularité

**dans un repère orthonormé**

§1.Droites orthogonales

Soit la droite D=ab de vecteur directeur ****(xb-xa,yb-ya,zb-za) ;

la droite D’=cd de vecteur directeur ****(xd-xc,yd-yc,zd-zc).

|  |
| --- |
| **D ⊥ D’ ⇔ (xb-xa) . (xd-xc) + (yb-ya) . (yd-yc) + (zb-za) . (zd-zc)=0** |

Les droites D et D’ sont orthogonales ssi les vecteurs  et  sont perpendiculaires c’est-à-dire :

§2.Droite et plan perpendiculaires

Soit la droite D=pq de vecteur directeur ****(xq-xp,yq-yp,zq-zp) ;

le plan α≡ax+by+cz+d=0 de vecteur normal ****(a,b,c).

La droite D et le plan α sont perpendiculaires ssi **** et **** sont colinéaires c’est-à-dire, si **** n’a pas de composante nulle :

|  |
| --- |
| **D ⊥ α** ⇔ |

§3.Plans perpendiculaires

Soit le plan α≡ax+by+cz+d=0 de vecteur normal ****(a,b,c) ;

le plan β≡a’x+b’y+c’z+d’=0 de vecteur normal **** (a’,b’,c’).

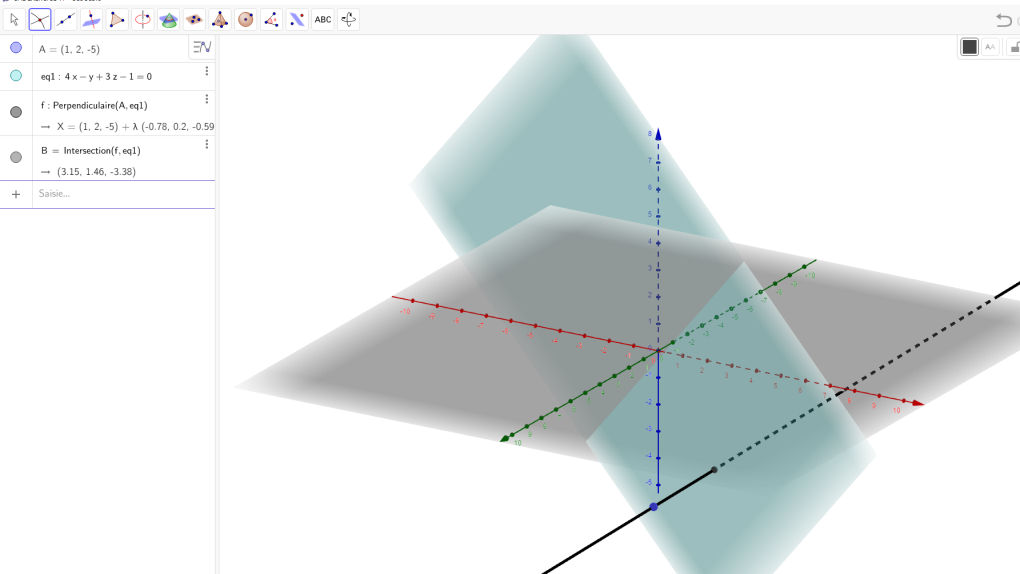
|  |
| --- |
| **α ⊥ β ⇔ a.a’+b.b’+c.c’=0** |

Les plans α et β sont perpendiculaires ssi **** et **** sont perpendiculaires c’est-à-dire

§4.Exercices

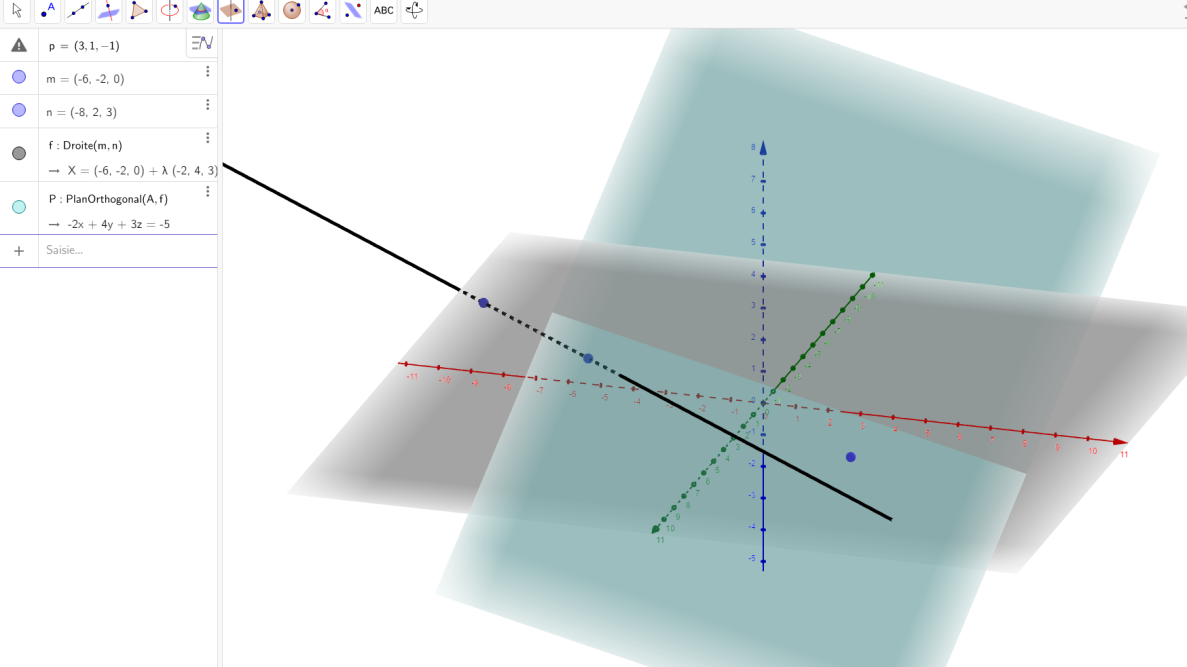
11) On donne le point p(1,2,-5) et le plan α≡4x-y+3z-1=0. On demande des équations cartésiennes de la droite D passant par p et ⊥ α.

* D ⊥ α ⇔
* Prenons k=1:



12) On donne le point p(3,1,-1) et la droite A=mn avec m (-6,-2,0) et n(-8,2,3). On demande une équation cartésienne du plan β, passant par p et ⊥ A.

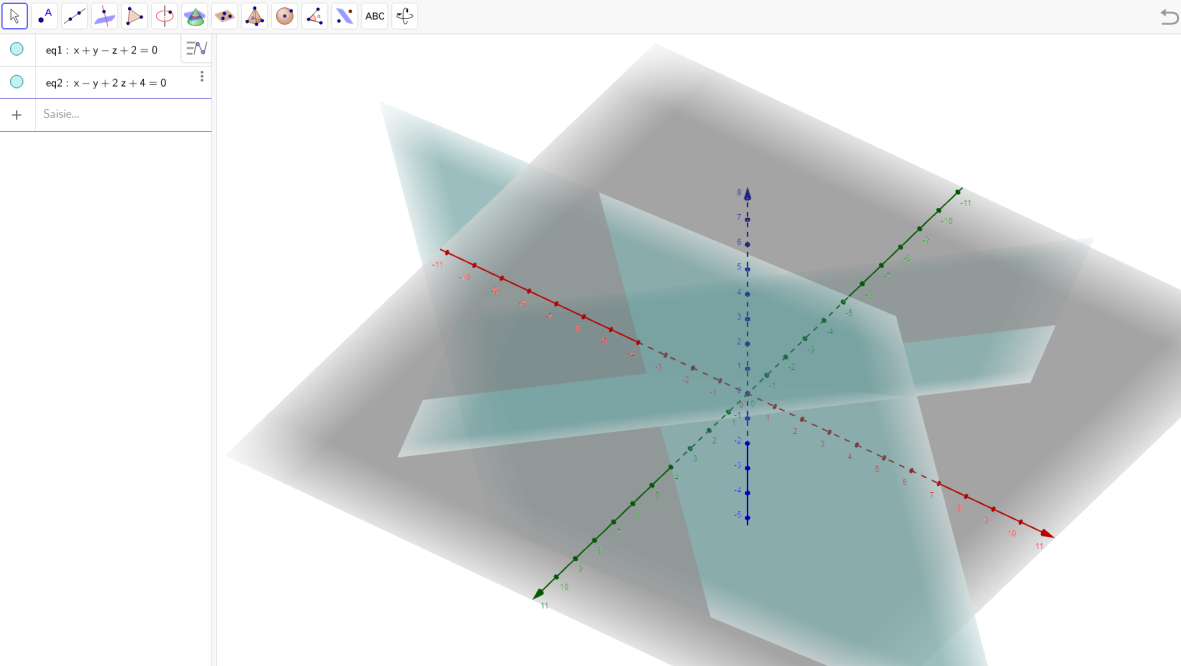
* β ⊥ A ⇔
* Prenons k=1:



13) Les plans suivants sont-ils perpendiculaires ?

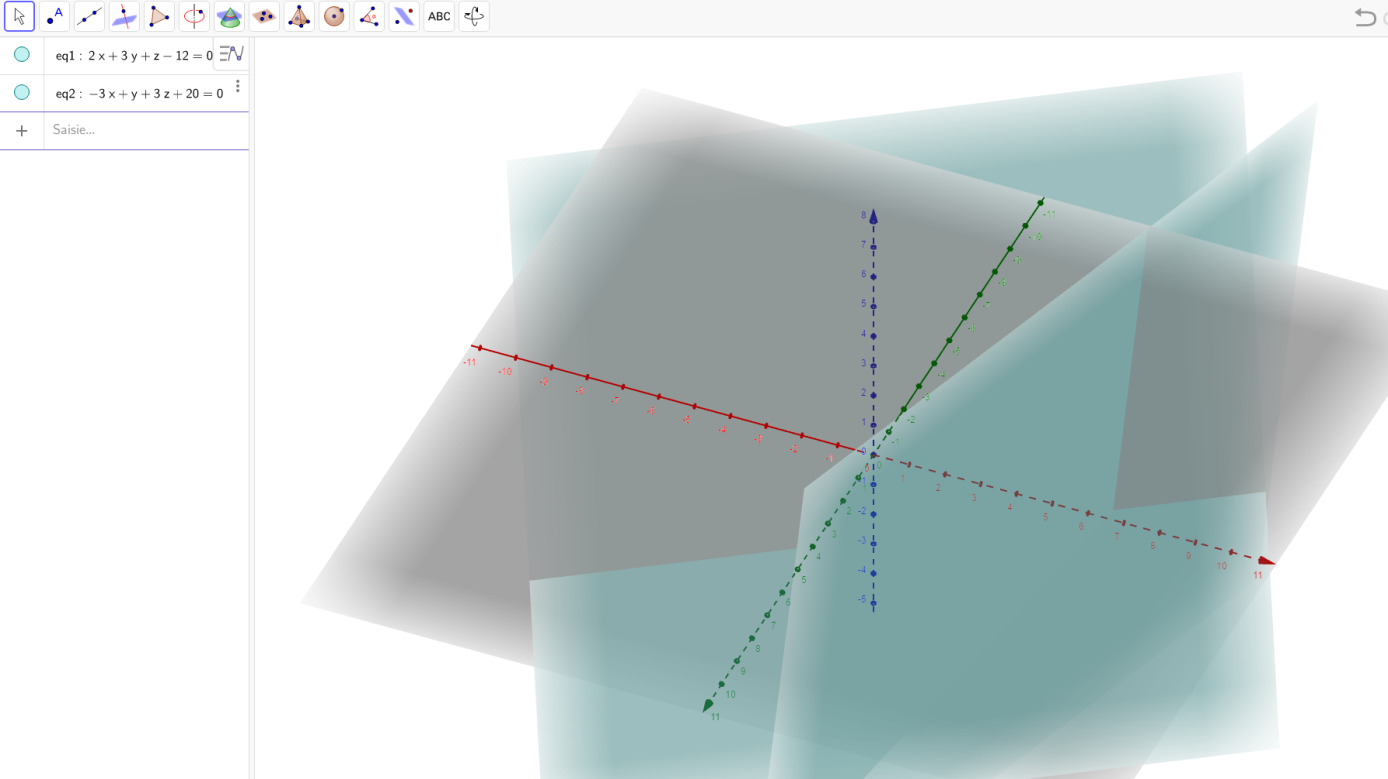
a) α≡x+y-z+2=0 et α’≡x-y+2z+4=0 :

Donc α et α’ ne sont pas perpendiculaires.



b) α≡2x+3y+z-12=0 et α’≡-3x+y+3z+20=0.

Donc α et α’ sont perpendiculaires.



Chapitre VI : Distances

§1.Distance d’un point à un plan

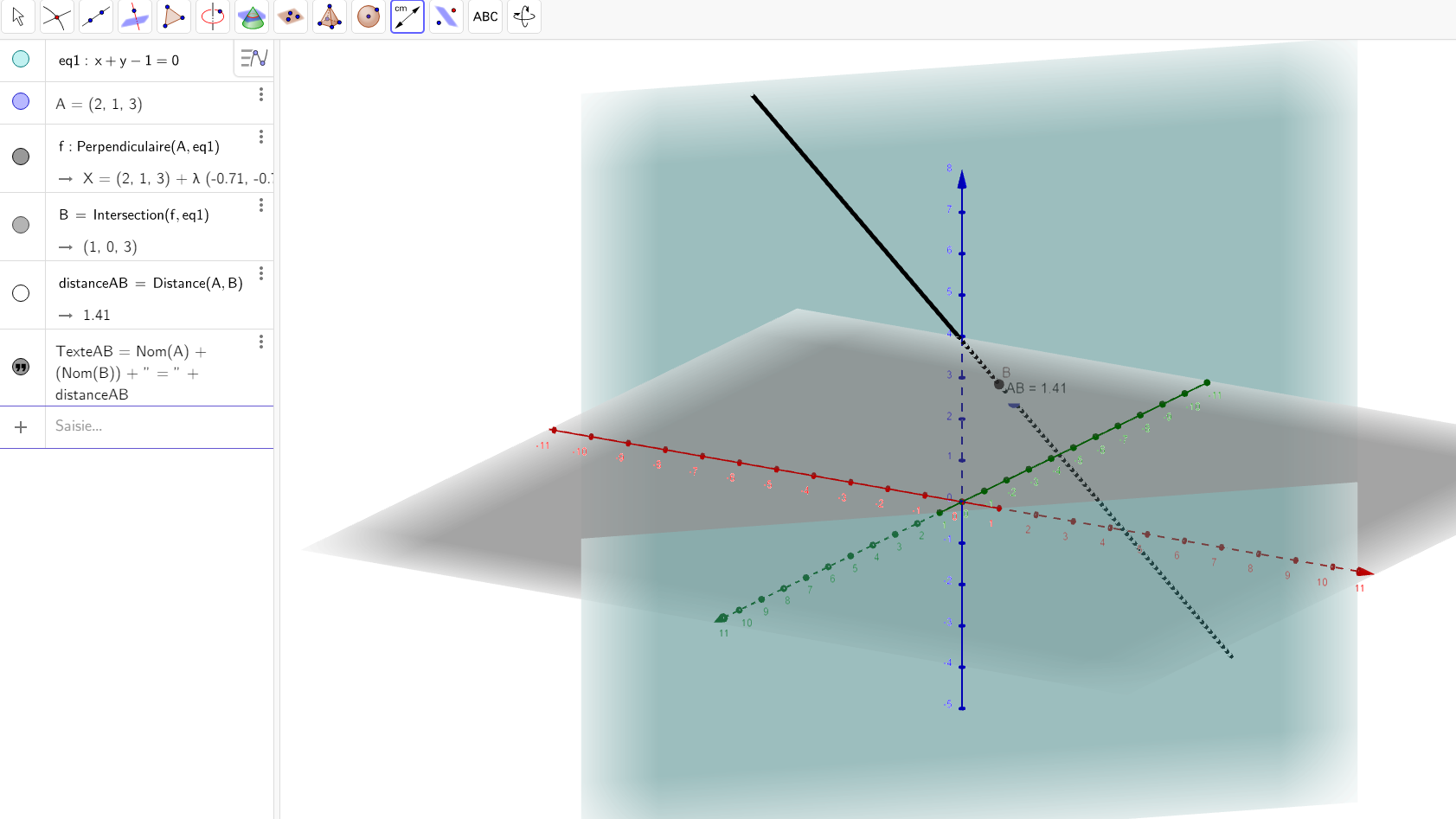
a) Formule :

Soit un point p(xp,yp,zp) et un plan π ≡ ax+by+cz+d=0. La distance du point p au plan π est

|  |
| --- |
|  |

b) Exemple : déterminer la distance du point p(2,1,3) au plan

* Equation cartésienne de α : ⇨ y=1-x-2+z+2-z
* ⇨



§2.Distance d’un point à une droite

a) Méthode :





d(p, D) = d(p,p’)

b) Marche à suivre :

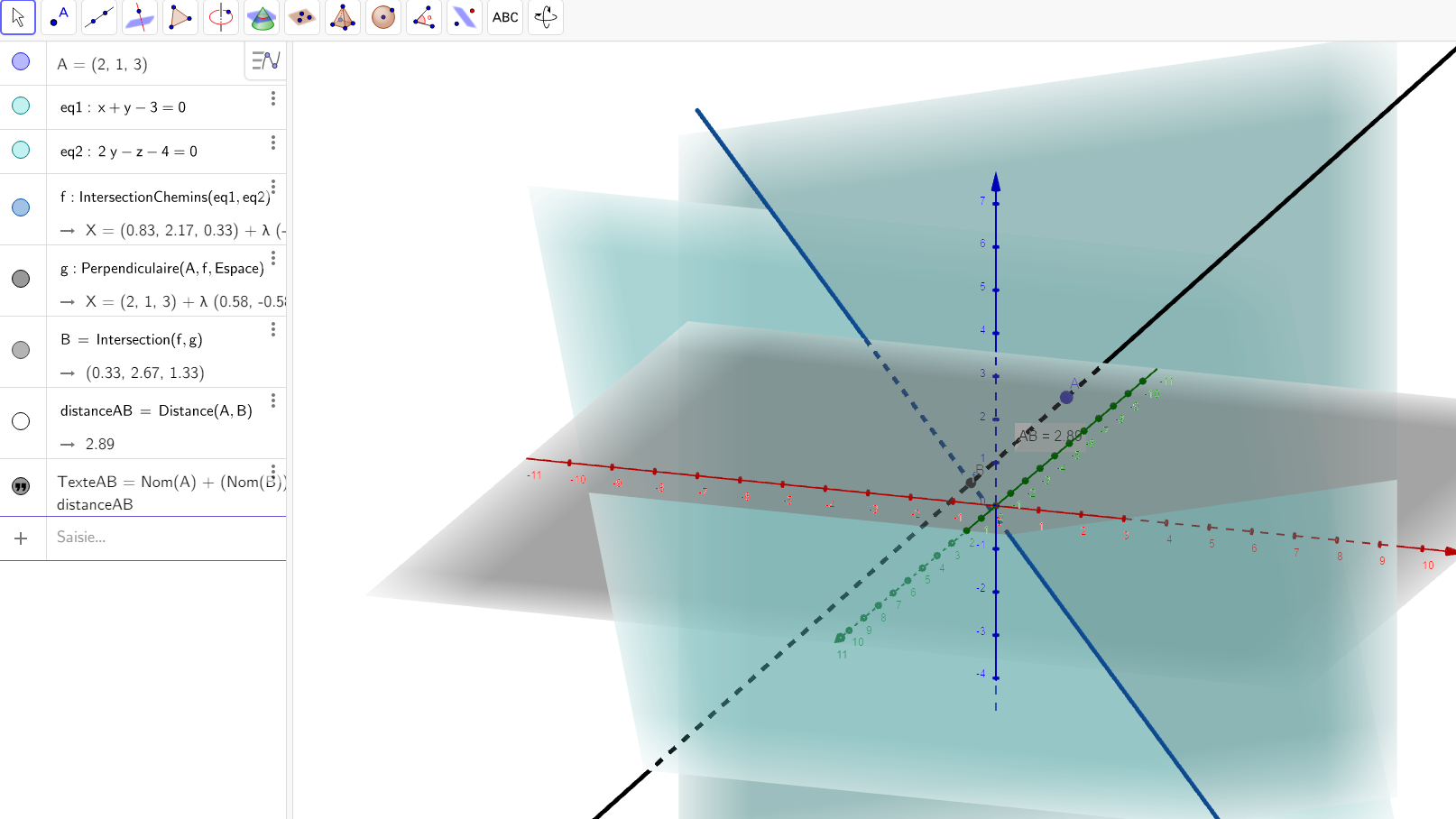
1) écrire l’équation de ;

2) déterminer la coordonnée de p’ ;

3) calculer d(p,p’).

c) Exemple : déterminer la distance du point p(2,1,3) à la droite

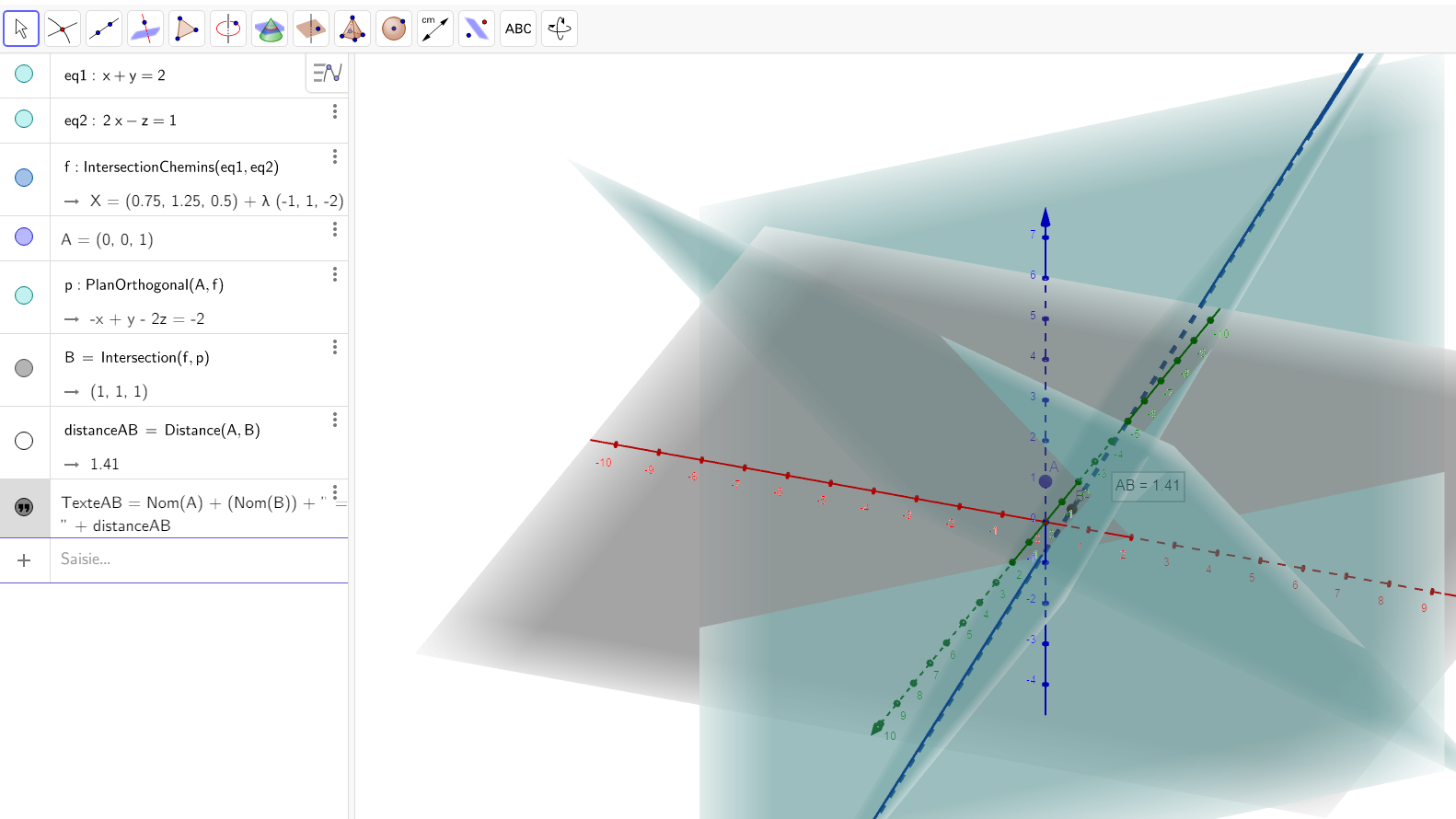
* α ⊥ D ⇔
* Prenons k=1:
* ⇨
* d(p, D) = d(p,p’)



§3.Exercices

14) Calculer la distance du point p(0,0,1) à la droite .

* α ⊥ D ⇔
* Déterminons 2 points de D : (0,2,-1) et (1,1,1) :
* Prenons k =1 :
* ⇨
* d(p, D) = d(p,p’)



15) Calculer la distance du point m(1,0,1) au plan π ≡ 3x-y-z+1=0.

* ⇨

